УДК 535.317.2:681.7.067:628.947

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСВЕЩЕННОСТИ, ФОРМИРУЕМОЕ СВЕТОВЫМ ПУЧКОМ, ОТРАЖЕННЫМ ОТ ПЛОСКОГО СВЕТОВОЗВРАЩАЮЩЕГО ПОКРЫТИЯ

© 2005 г. **Ю. Н. Бугаев**, канд. техн. наук; **Р. Е. Ильинский**, канд. техн. наук

ОКБ Московского энергетического института, Москва
E-mail: bugaev@okbmei.ru

В приближении геометрической оптики рассмотрен расчет распределения освещенности, которое формирует световой пучок после отражения от световозвращающего покрытия в плоскости выходного зрачка передающей оптической системы. Передающая оптическая система состоит из фокусирующего объектива и ламбертова источника излучения.

Коды OCIS: 080.0080.

Поступила в редакцию 16.07.2004.

1. Введение

Световозвращающие покрытия (СВП) широко используются при проведении высокоточных измерений траекторий летательных и космических аппаратов [1], в системах обеспечения безопасности дорожного движения [2, 3], при проведении военно-спортивных игр [4].

В данной статье рассматривается случай, когда СВП состоит из большого числа элементарных световозвращателей (микросфер или микропризм) малых геометрических размеров (рис. 1, 2). При этом элементарные световозвращатели размещены на плоской опорной поверхности. Введем систему координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ таким образом, чтобы плоскость $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ совпадала с опорной плоскостью СВП. В приближении нулевого порядка любые два элементарных световозвращателя переводятся друг в друга параллельным переносом в плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ и разворотом вокруг оси $\tilde{O}\tilde{Z}$. В приближении первого порядка относительно линейных размеров элементарных световозвращателей оптико-геометрические характеристики элементарных световозвращателей отличаются друг от друга, но вариации их линейных и угловых размеров на порядок меньше соответствующих номинальных значений.

Координаты и направляющие тангенсы луча в плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ до (индекс $_{in}$) и после (индекс $_{out}$) прохождения СВП представим в виде:

$$\tilde{x}_{out} = \tilde{x}_{out}\left(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}, \alpha_{xin}, \alpha_{yin}\right), \quad (1)$$

$$\tilde{y}_{out} = \tilde{y}_{out}\left(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}, \alpha_{xin}, \alpha_{yin}\right), \quad (2)$$

$$\alpha_{xout} = \alpha_{xout}\left(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}, \alpha_{xin}, \alpha_{yin}\right), \quad (3)$$

$$\alpha_{yout} = \alpha_{yout}\left(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}, \alpha_{xin}, \alpha_{yin}\right). \quad (4)$$

Дальше будет рассмотрен случай, когда луч падает на СВП примерно по нормали к плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ ($\alpha_{xin} \to 0$, $\alpha_{yin} \to 0$). Представим функции (3), (4) в виде ряда Тейлора по переменным α_{xin}, α_{yin}:

$$\alpha_{xout} = \varphi_x\left(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}\right) + \left.\frac{\partial \alpha_{xout}}{\partial \alpha_{xin}}\right|_{\substack{\alpha_{xin}=0 \\ \alpha_{yin}=0}} \alpha_{xin} + \left.\frac{\partial \alpha_{xout}}{\partial \alpha_{yin}}\right|_{\substack{\alpha_{xin}=0 \\ \alpha_{yin}=0}} \alpha_{yin} + O_2, \quad (5)$$

$$\alpha_{yout} = \varphi_y\left(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}\right) + \left.\frac{\partial \alpha_{yout}}{\partial \alpha_{xin}}\right|_{\substack{\alpha_{xin}=0 \\ \alpha_{yin}=0}} \alpha_{xin} + \left.\frac{\partial \alpha_{yout}}{\partial \alpha_{yin}}\right|_{\substack{\alpha_{xin}=0 \\ \alpha_{yin}=0}} \alpha_{yin} + O_2, \quad (6)$$

где $\varphi_x(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}) = \alpha_{xout}(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}, 0, 0)$, $\varphi_y(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}) = \alpha_{yout}(\tilde{x}_{in}, \tilde{y}_{in}, 0, 0)$, O_2 – величины второго порядка малости относительно α_{xin}, α_{yin}.

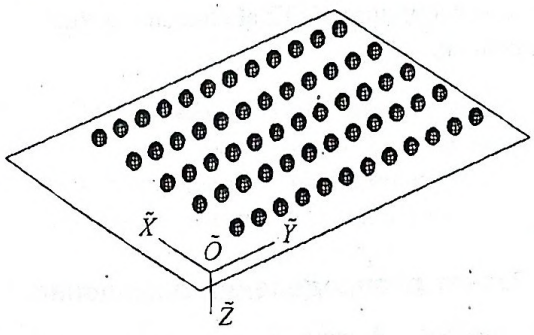

Рис. 1. Схема СВП на основе микросфер.

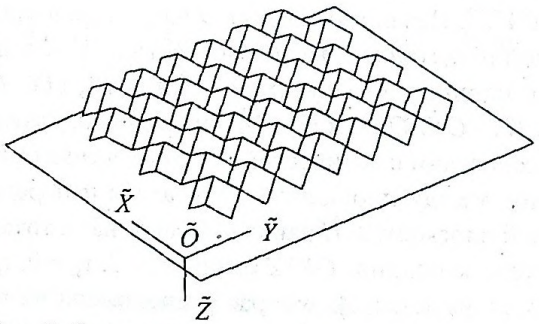

Рис. 2. Схема СВП на основе микропризм.

В [5] рассмотрен ход луча через световозвращатели вращательно-симметричных типов и через световозвращатели на основе трех взаимно перпендикулярных зеркал. На основании результатов этой работы значения частных производных в формулах (5), (6) примем равными:

$$\left.\frac{\partial \alpha_{x\text{out}}}{\partial \alpha_{x\text{in}}}\right|_{\substack{\alpha_{x\text{in}}=0\\ \alpha_{y\text{in}}=0}} = -1 + O_2, \tag{7}$$

$$\left.\frac{\partial \alpha_{x\text{out}}}{\partial \alpha_{y\text{in}}}\right|_{\substack{\alpha_{x\text{in}}=0\\ \alpha_{y\text{in}}=0}} = O_2, \tag{8}$$

$$\left.\frac{\partial \alpha_{y\text{out}}}{\partial \alpha_{x\text{in}}}\right|_{\substack{\alpha_{x\text{in}}=0\\ \alpha_{y\text{in}}=0}} = O_2, \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial \alpha_{y\text{out}}}{\partial \alpha_{y\text{in}}}\right|_{\substack{\alpha_{x\text{in}}=0\\ \alpha_{y\text{in}}=0}} = -1 + O_2. \tag{10}$$

Точки с координатами $(\tilde{x}_{\text{in}}, \tilde{y}_{\text{in}})$ и $(\tilde{x}_{\text{out}}, \tilde{y}_{\text{out}})$ должны принадлежать одному и тому же элементарному световозвращателю. Так как поперечные размеры элементарных световозвращателей современных СВП являются малыми, то $\tilde{x}_{\text{in}} \approx \tilde{x}_{\text{out}}$, $\tilde{y}_{\text{in}} \approx \tilde{y}_{\text{out}}$. Окончательно выражения (1)–(4) представим в виде:

$$\tilde{x}_{\text{out}} = \tilde{x}_{\text{in}}, \tag{11}$$

$$\tilde{y}_{\text{out}} = \tilde{y}_{\text{in}}, \tag{12}$$

$$\alpha_{x\text{out}} = -\alpha_{x\text{in}} + \varphi_y(\tilde{x}_{\text{in}}, \tilde{y}_{\text{in}}), \tag{13}$$

$$\alpha_{y\text{out}} = -\alpha_{y\text{in}} + \varphi_y(\tilde{x}_{\text{in}}, \tilde{y}_{\text{in}}). \tag{14}$$

2. Расчет хода луча через передающую оптическую систему и СВП

На рис. 3 показаны передающая оптическая система и СВП. Первая состоит из безаберрационного объектива O и ламбертова источника излучения. Выходной зрачок объектива O совпадает с его задней главной плоскостью. Дополнительно к системе координат СВП $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ введем системы координат $OXYZ$ и $O^*X^*Y^*Z^*$. Начало координат O находится в задней главной точке объектива O. Плоскость $O^*X^*Y^*$ совпадает с площадкой излучателя. Оси O^*X^*, OX, $\tilde{O}\tilde{X}$, O^*Y^*, OY, $\tilde{O}\tilde{Y}$, O^*Z^*, OZ, $\tilde{O}\tilde{Z}$ попарно сонаправлены и совпадают с оптической осью объектива O. Расстояние между площадкой излучателя и передней главной плоскостью H равно d. Координаты точки $\tilde{O}$ в системе координат $OXYZ$ равны $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, z_0.

Пусть из точки A, которая расположена на площадке излучателя, выходит луч. Плоскость выходного зрачка H' объектива O этот луч пересекает в точке B; плоскость $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ луч пересекает в точке C. После отражения от СВП луч вторично пересекает плоскость OXY в точке M. Обозначим: $x_A^*, y_A^*, z_A^* = 0$ – координаты точки A в системе координат $O^*X^*Y^*Z^*$; x_B, y_B, $z_B = 0$ – координаты точки B в системе координат $OXYZ$. Направляющие тангенсы луча AB равны [6]:

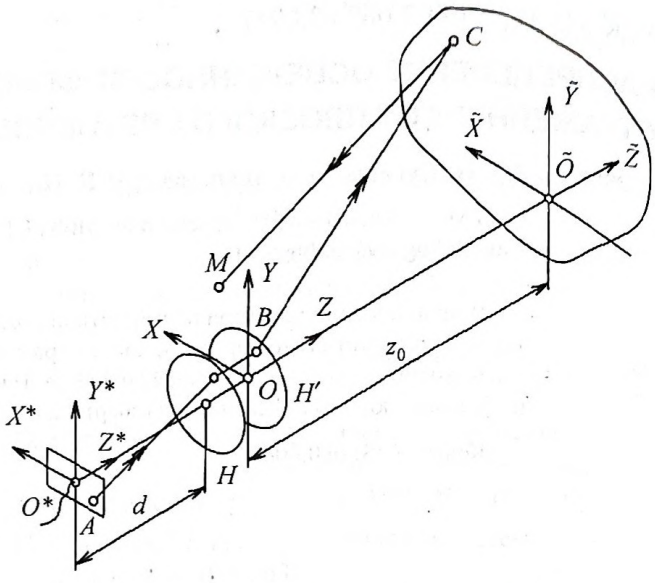

Рис. 3. Передающая оптическая система и СВП.

$$\alpha_{xAB} = (x_A^* - x_B)/d;\ \alpha_{yAB} = (y_A^* - y_B)/d. \tag{15}$$

После прохождения лучом объектива O направляющие тангенсы этого луча равны:

$$\alpha_{xBC} = \alpha_{xAB} + x_B/f';\ \alpha_{yBC} = \alpha_{yAB} + y_B/f'. \tag{16}$$

В системе координат $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}\tilde{Z}$ координаты точки C описываются выражениями:

$$\tilde{x}_C = x_B - \alpha_{xBC} z_0, \tag{17}$$

$$\tilde{y}_C = y_B - \alpha_{yBC} z_0, \tag{18}$$

$$\tilde{z}_C = 0. \tag{19}$$

При выполнении условий $\alpha_{xBC} \to 0$, $\alpha_{yBC} \to 0$ направляющие тангенсы луча после прохождения через СВП определяются по формулам (13)–(14):

$$\alpha_{xCM} = -\alpha_{xBC} + \varphi_x(\tilde{x}_C, \tilde{y}_C), \tag{20}$$

$$\alpha_{yCM} = -\alpha_{yBC} + \varphi_y(\tilde{x}_C, \tilde{y}_C). \tag{21}$$

В системе координат $OXYZ$ абсцисса и ордината точки M равны:

$$x_M = \tilde{x}_C - \alpha_{xCM} z_0, \tag{22}$$

$$y_M = \tilde{y}_C - \alpha_{yCM} z_0. \tag{23}$$

3. Расчет распределения освещенности

Обозначим $\square A$ прямоугольную площадку в плоскости $O^*X^*Y^*$, которая описывается выражениями

$\left|x^* - x_A^*\right| \le \frac{1}{2}\Delta x_A^*$, $\left|y^* - y_A^*\right| \le \frac{1}{2}\Delta y_A^*$. Аналогично под $\square B$ будем понимать прямоугольную площадку в плоскости $OXY\left(\left|x - x_B\right| \le \frac{1}{2}\Delta x_B,\ \left|y - y_B\right| \le \frac{1}{2}\Delta y_B\right)$.

Рассмотрим световую трубку, которая соответствует лучу $ABCM$ и пересекает плоскость $O^*X^*Y^*$ по площадке $\square A$, а плоскость OXY – по площадке $\square B$ (рис. 3).

Если в объективе O выполняется условие синусов и $\Delta x_B \to 0$, $\Delta y_B \to 0$, $\Delta x_A^* \to 0$, $\Delta y_A^* \to 0$, то поток излучения ΔF, поступающий в световую трубку $ABCM$ с площадки $\square A$, равен [6]:

$$\Delta F = \Delta x_B \Delta y_B \Delta x_A^* \Delta y_A^* L(x_A^*, y_A^*)/d^2, \qquad (24)$$

где функция $L(x^*, y^*)$ описывает в системе координат $O^*X^*Y^*Z^*$ распределение яркости в плоскости излучателя. Поток излучения, который проходит через участок CM световой трубки, равен:

$$\Delta F' = \Delta F P(x_B, y_B) T(\tilde{x}_C, \tilde{y}_C), \qquad (25)$$

где функция $P(x, y)$ описывает в системе координат $OXYZ$ пропускание выходного зрачка объектива O; $T(\tilde{x}, \tilde{y})$ – коэффициент пропускания СВП в точке $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z} = 0)$.

Если $\Delta x_B \to 0$, $\Delta y_B \to 0$, $\Delta x_A^* \to 0$, $\Delta y_A^* \to 0$, то распределение освещенности в плоскости OXY, которое обусловлено потоком $\Delta F'$, описывается формулой:

$$E_{ABCM}(x, y) = \Delta F P(x_B, y_B) T(\tilde{x}_C, \tilde{y}_C) \delta(x - x_M, y - y_M), \qquad (26)$$

где x_M, y_M – координаты точки M [см. формулы (22), (23)]; $\delta(x, y)$ – двумерная дельта-функция.

Проинтегрировав выражение (26), найдем распределение освещенности $E(x, y)$ в плоскости OXY, обусловленное потоком излучения, который исходит из плоскости излучателя $O^*X^*Y^*$ и последовательно проходит через объектив O и СВП:

$$E(x,y) = \frac{1}{d^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} L\left(x^*, y^*\right) P(\xi,\eta) T\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) \times$$
$$\times \delta\left[x - \xi + z_0 \varphi_x\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right),\ y - \eta + z_0 \varphi_y\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right)\right] dx^* dy^* d\xi d\eta, \qquad (27)$$

где

$$\tilde{x} = \xi - z_0\left(\frac{x^* - \xi}{d} + \frac{\xi}{f'}\right),\ \tilde{y} = \eta - z_0\left(\frac{y^* - \eta}{d} + \frac{\eta}{f'}\right) -$$

координаты точки на СВП, в которую попадает луч, соответствующий координатам ξ, η на выходном зрачке и координатам x^*, y^* на площадке излучателя.

Непосредственное измерение, а тем более аналитическое описание функций $\varphi_x(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\varphi_y(\tilde{x}, \tilde{y})$ для СВП с большим числом элементарных световозвращателей невозможно. Поэтому целесообразно перейти к статистическим методам [7].

Пусть $\{\tilde{V}_j\}$ $(j = 1, 2, 3\ldots)$ – бесконечное множество точек, которые равномерно и абсолютно случайно распределены по поверхности СВП. Функция $R(\varphi_x, \varphi_y)$ описывает плотность распределения вероятности появления пары данных значений φ_x, φ_y в точках $\tilde{V}_j$. Сделаем допущение, что функция $R(\varphi_x, \varphi_y)$ будет одинаковой для любой достаточно длинной последовательности произвольно выбранных точек из множества $\{\tilde{V}_j\}$. При выполнении этого условия функция $R(\varphi_x, \varphi_y)$ не зависит от координат $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ на опорной плоскости СВП. Тогда формулу (27) можно представить в виде:

$$E(x,y) = \frac{1}{d^2} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} L\left(x^*, y^*\right) P(\xi,\eta) T\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) \times$$
$$\times \delta\left(x - \xi + z_0 \varphi_x,\ y - \eta + z_0 \varphi_y\right) \times \qquad (28)$$
$$\times R\left(\varphi_x, \varphi_y\right) dx^* dy^* d\xi d\eta d\varphi_x d\varphi_y.$$

После преобразований последнее выражение примет вид:

$$E(x,y) = \frac{1}{z_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} L\left(-\frac{d}{z_0}\tilde{x} + d\xi\gamma,\ -\frac{d}{z_0}\tilde{y} + d\eta\gamma\right) \times$$
$$\times P(\xi,\eta) T\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) R\left(\frac{\xi - x}{z_0},\ \frac{\eta - y}{z_0}\right) d\tilde{x} d\tilde{y} d\xi d\eta, \qquad (29)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{d} - \frac{1}{f'}. \qquad (30)$$

4. Анализ распределения освещенности в частных случаях

4.1. Площадка излучателя находится в передней главной плоскости объектива O

Пусть излучатель находится в передней главной плоскости объектива O $(d = 0)$. Тогда (29) можно представить в виде:

$$E(x,y) = \frac{\sigma}{z_0^4} \int_{-\infty}^{+\infty}\int L_P(\xi,\eta) R\left(\frac{\xi - x}{z_0},\ \frac{\eta - y}{z_0}\right) d\xi d\eta, \qquad (31)$$

где $L_P(u, v) = L(u, v) P(u, v)$,

$$\sigma = \int_{-\infty}^{+\infty}\int T\left(\tilde{x}, \tilde{y}\right) d\tilde{x} d\tilde{y}. \qquad (32)$$

Фокусное расстояние объектива O не входит в выражение (31). Если

$$P(x,y)=\begin{cases}1 & \text{при } L(x,y)\neq 0,\\ 0 & \text{при } L(x,y)=0,\end{cases}$$

то $L_P(u, v) = L(u, v)$. Так как передняя и задняя главные плоскости оптически сопряжены и линейное увеличение в этих плоскостях равно +1, то выражение (31) описывает случай, когда СВП освещено излучателем с распределением яркости $L(u, v)$ напрямую, без объектива O.

Если в качестве излучателя используется точечный источник с яркостью $L_\odot$, то $L(u, v) = L_\odot\delta(u, v)$ и формула (31) примет вид:

$$E(x,y)=L_\odot\frac{\sigma}{z_0^4}R\left(-\frac{x}{z_0},-\frac{y}{z_0}\right). \qquad (33)$$

Из последней формулы следует, что функцию $R(\varphi_x, \varphi_y)$ можно интерпретировать как относительное распределение освещенности, которое возникает при освещении СВП точечным источником. Данная интерпретация часто используется при измерении характеристик СВП [8, 9, 4].

4.2. Равномерное распределение яркости по площадке излучателя

В подавляющем большинстве случаев функции $L(x^*, y^*)$, $P(x, y)$, $T(\tilde{x}, \tilde{y})$ отличны от нуля только в пределах ограниченных областей Ω_L, Ω_P и Ω_T соответственно. Очевидно, что область Ω_P является выходным зрачком объектива O, область Ω_T – поверхностью СВП, а Ω_L – площадкой излучателя. Рассмотрим случай равномерного распределения яркости по площадке излучателя:

$$L\left(x^*,y^*\right)=\begin{cases}L_0 & \text{при } x^*,\ y^*\in\Omega_L,\\ 0 & \text{при } x^*,\ y^*\notin\Omega_L.\end{cases} \qquad (34)$$

Распределение освещенности в плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ имеет вид [10]:

$$\tilde{E}(\tilde{x},\tilde{y})=\frac{1}{z_0^4\gamma^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int P\left(\frac{u}{z_0\gamma},\frac{v}{z_0\gamma}\right)L\left[-\frac{d}{z_0}(\tilde{x}-u),-\frac{d}{z_0}(\tilde{y}-v)\right]dudv=\frac{1}{z_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int P(\xi,\eta)L\left(-\frac{d}{z_0}\tilde{x}+d\xi\gamma,-\frac{d}{z_0}\tilde{y}+d\eta\gamma\right)d\xi d\eta. \qquad (35)$$

Введем область $\tilde{\Omega}$ в плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ следующим образом: для любой точки $(\tilde{x}, \tilde{y})\in\tilde{\Omega}$ выполняется условие

$$\left(-\frac{d}{z_0}\tilde{x}+d\xi\gamma,-\frac{d}{z_0}\tilde{y}+d\eta\gamma,\right)\in\Omega_T \qquad (36)$$

для всех точек $(\xi, \eta)\in\Omega_P$. Из формулы (35) следует, что освещенность в любой точке области $\tilde{\Omega}$ одинаковая и равна

$$\tilde{E}_0=\frac{L_0}{z_0^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int P(\xi,\eta)d\xi d\eta. \qquad (37)$$

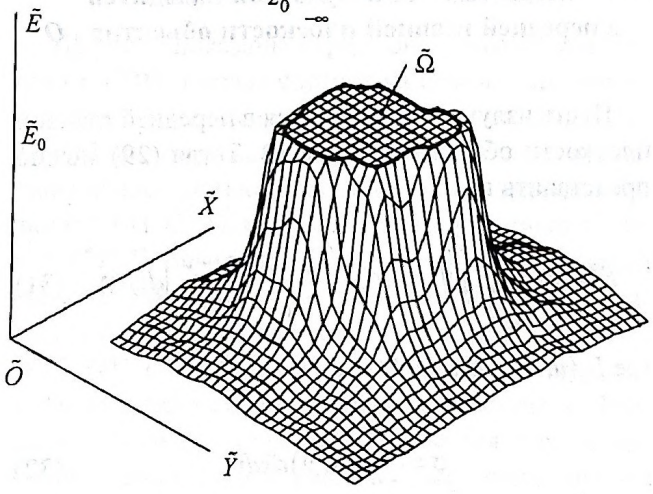

Рис. 4. Распределение освещенности в плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$ и область $\tilde{\Omega}$.

Для точек плоскости $\tilde{O}\tilde{X}\tilde{Y}$, не принадлежащих области $\tilde{\Omega}$, освещенность лежит в пределах $\tilde{E}_0$–0 (рис. 4). Из геометрической интерпретации свертки двух функций следует, что выражение (35) можно представить в виде (37) только тогда, когда поперечные размеры пятна рассеяния в плоскости $z = z_0$ [функция $P(\xi/\gamma z_0, \eta/\gamma z_0)$] меньше размеров увеличенной в $(-z_0/d)$ раз излучающей площадки [функция $L(-\xi d/z_0, -\varsigma d/z_0)$] [10].

Если световозвращающее покрытие целиком лежит в пределах области $\tilde{\Omega}$, то из выражений (29), (37) следует:

$$E(x,y)=\frac{L_0\sigma}{z_0^4}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int P(\xi,\eta)R\left(\frac{\xi-x}{z_0},\frac{\eta-y}{z_0}\right)d\xi d\eta, \qquad (38)$$

где σ вычисляется по формуле (32).

4.3. СВП с индикатрисой рассеяния типа “еж”

В первом приближении СВП с индикатрисой рассеяния типа “еж” [11] соответствует функция распределения плотности вероятности вида:

$$R\left(\varphi_x,\varphi_y\right)=\sum_{i=1}^{M}g_i\delta\left(\varphi_x-\psi_{xi},\varphi_y-\psi_{yi}\right), \qquad (39)$$

где ψ_{xi}, ψ_{yi}, g_i – постоянные, M – целое число. После подстановки функции (39) в выражение (29) получим:

$$E(x,y)=\frac{1}{z_0^2}\sum_{i=1}^{M}g_iP\left(x+\psi_{xi}z_0,y+\psi_{yi}z_0\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\int L\left[-\frac{d}{z_0}\tilde{x}+d\gamma\left(x+\psi_{xi}z_0\right),-\frac{d}{z_0}\tilde{y}+d\gamma\left(y+\psi_{yi}z_0\right)\right]T\left(\tilde{x},\tilde{y}\right)d\tilde{x}d\tilde{y}. \quad (40)$$

После подстановки функции (39) в выражение (38) получим:

$$E(x,y)=\frac{L_0\sigma}{z_0^2}\sum_{i=1}^{M}g_iP\left(x+\psi_{xi}z_0,y+\psi_{yi}z_0\right). \quad (41)$$

5. Заключение

Рассмотрено распределение освещенности, которое формирует световой пучок от ламбертова источника излучения после прохождения им безаберрационного объектива и плоского СВП. Для описания оптико-геометрических характеристик СВП была использована статистическая модель. Полученные в статье формулы (29), (38),(40), (41) позволяют оценить влияние основных оптических характеристик передающей оптической системы и СВП. Поэтому результаты данной работы могут быть рекомендованы для габаритного и светоэнергетического расчета оптических приборов, которые работают совместно с СВП.

Особенный интерес представляет использование формулы (31) для анализа и выбора оптимальных схем контроля СВП для различных областей применения.

В дальнейшем предполагается обобщить полученные в статье выражения на случай освещения СВП одномодовыми и многомодовыми лазерными пучками.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bugaev Yu.N., Bogomolov A.A., Bugaev E.I., Pankov A.A.* Results of tests on measurement of flight vehicle coordinates by using laser-television measuring stations // Proc. SPIE. 2002. V. 4680. P. 139–149.
2. *Brekke B.* Retroreflectors in road traffic: evaluation of pedestrian retroreflectors // Proc. SPIE. 1981. V. 262. C. 44–49.
3. *Эвальд Ю.* Световозвращающие материалы и их применение в знаках дорожного движения / Пер. с нем. В.П. Жильцова // Светотехника. 2000. № 2. С. 4–6.
4. *Seward G.H., Cort P.S.* Measurement and characterization of angular reflectance for cube-corners and microspheres // Opt. Eng. 1999. V. 38. № 1. C. 164–169.
5. *Ильинский Р.Е.* Распределение освещенности, формируемое световым пучком, отраженным от световозвращателя // Труды Оптического общества имени Д.С. Рождественского. V Междунар. конф. "Прикладная оптика 2002". Т. 3 С. 188–191.
6. *Заказнов Н.П., Кирюшин С.И., Кузичев В.И.* Теория оптических систем. М.: Машиностроение, 1992. 448 с.
7. *Решетин Е.Ф.* Коэффициент силы света световозвращателя как функция угла расхождения // Труды НИИ автоприборов. М.: 1988. В. 65. С. 105–114.
8. *Бороденко В.И.* Установка для промышленного контроля качества световозвращателя // Труды НИИ автоприборов. М.: 1974. В. 31. С. 47–56.
9. *Rennilson J.J.* Retroreflection measurements: a review // Applied Optics. 1980. V. 19. № 8. C. 1234–1235.
10. *Мосягин Г.М., Немтинов В.Б., Лебедев Е.Н.* Теория оптико-электронных систем. М.: Машиностроение, 1990. 432 с.
11. *Молохина Л.А., Филин С.А.* Световозвращающие материалы с управляемыми углами между падающим и возвращенным светом // Двойные технологии. 2001. № 1. С. 47–51.