

НОВЫЕ ВОЗМОЖНОСТИ ДЛЯ ИЗМЕРЕНИЯ ФОРМЫ ИМПУЛЬСА ИЛИ ПРОФИЛЯ ПУЧКА ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

© 2008 г. В. А. Трофимов, доктор физ.-мат. наук; С. А. Варенцова, канд. физ.-мат. наук

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Москва

E-mail: vatro@cs.msu.su

Предложен новый метод восстановления формы импульса и профиля лазерного пучка, основанный на использовании интегральных измерений энергии излучения лазера. В одномерном случае работоспособность и эффективность алгоритма продемонстрирована на примере восстановления отклика молекулы *L-cystine* при воздействии малопериодного терагерцового импульса. Для пространственно двумерной области предложенный метод позволяет получить высокоточное восстановление модельных профилей пучка. Аналогичное восстановление профиля пучка, выполненное на основе методов оптической томографии, существенно уступает в качестве получаемого профиля лазерного пучка.

Коды OCIS: 120.4290, 110.4500.

Поступила в редакцию 10.01.2008.

Как известно, для многих практических приложений, основанных на применении излучения лазера, необходимо использовать оптическое излучение с определенными профилем пучка и формой импульса. Измерение данных характеристик в физических экспериментах в ряде случаев (например, для излучения терагерцового диапазона) является достаточно трудной задачей. Для этих целей используются автокорреляционные функции или пространственное преобразование Фурье. В данной работе описывается метод восстановления формы импульса (или отклика среды) и профиля пучка, основанный на интегральных измерениях их характеристик: для временной зависимости – в частично перекрывающихся временных интервалах, а для пространственного распределения – в разнонаправленных “полосах”.

Информация о форме воздействующего импульса (или отклика среды) представляет интерес прежде всего для решения задач терагерцовой пространственно-временной спектроскопии, основной целью которых является временной анализ спектра отклика среды. В настоящее время существуют несколько алгоритмов, которые используются в физических экспериментах для решения этой задачи. Согласно [1] у них имеются недостатки, которые иногда приводят к абсурдным результатам. Поэтому создание нового алгоритма для “он-лайновой” реконструкции формы импульса и, соответственно, мгновенного анализа спектра под действием терагерцового лазерного импульса является в настоящее время актуальной задачей. Ранее [2–4] нами были предложены два возможных алгоритма анализа мгновенных спектральных интенсивностей среды под действием малопериодного импульса. В первом алгоритме [2] использовалось оконное преобразование Фурье–Габора. Однако этот алгоритм дает возможность получить динамику толь-

ко одной спектральной линии для одной серии измерений. Второй алгоритм [3, 4] позволяет по одной серии измерений энергии лазерного импульса (отклика среды) восстановить его форму и получить информацию о динамике всего спектра или нескольких спектральных линий сразу. Эффективность этого алгоритма была исследована в [3] и применительно к пространственным распределениям, обладающим аксиальной симметрией. Приведенные результаты восстановления модельных функций, описывающих пространственный профиль пучка, продемонстрировали высокую точность развиваемого метода. При этом восстановление пространственного распределения интенсивности лазерного излучения более общего вида в этой работе не обсуждалось. Ниже развиваемый нами подход обобщается именно на случай восстановления несимметричного профиля пучка. Проведенные расчеты показали высокую точность восстановления профиля. Отметим, что ранее аналогичная задача решалась в [5] методом оптической томографии. Однако на данный момент он не позволяет достичь точности, сравнимой с результатами метода, изложенного в настоящей работе.

Постановка задачи и алгоритм ее решения

Обозначим через $f(t)$ исходный сигнал (например, форму светового импульса или отклик среды), непрерывный на отрезке времени $[t_b, t_e]$. Требуется определить динамику спектральных линий сигнала $f(t)$ на данном временном интервале. Отметим, что в общем случае форма сигнала может быть неизвестна, однако в результате измерений в физическом эксперименте (см. рис. 1) можно получить набор интегральных данных $d_1, d_2, \dots, d_N$ от функции $f(t)$, где значения d_i определяются как

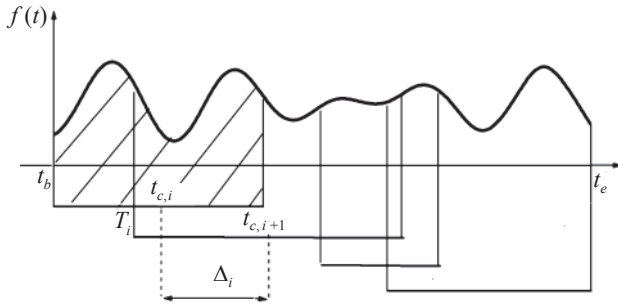


Рис. 1. Схематическое изображение интегральных измерений неизвестного сигнала $f(t)$ методом скользящих окон.

$$d_i = \int_{t_{c,i}-0,5T_i}^{t_{c,i}+0,5T_i} f(t)dt. \quad (1)$$

Для промежутков времени справедливо соотношение

$$t_{c,1} - 0,5T_1 \leq t_b, \quad t_{c,N} + 0,5T_N \geq t_e, \quad t_{c,i} < t_{c,i+1}, \quad \Delta_i = t_{c,i+1} - t_{c,i} < 0,5(T_{i+1} + T_i), \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

Здесь N – число временных интервалов, на которых проводится измерение интегральных данных, t_b – время начала регистрации сигнала, t_e – время ее окончания, T_i – длина окна (длина интервала, на котором проводится измерение), Δ_i – величина сдвига окна, т. е. промежуток времени, на который сдвигается центр окна $t_{c,i}$ в интеграле (1). Из (2) и рис. 1 видно, что временные интервалы частично пересекаются.

Для практики наибольший интерес представляют случайные изменения величин Δ_i и T_i при переходе от одного измерения к другому. Отметим, что в [6] анализировалась эффективность восстановления сигнала, если данные изменения равновероятны и происходят вблизи некоторого среднего значения каждого из параметров Δ и T . Таким образом, задача состояла в восстановлении сигнала $f(t)$ по известному набору интегральных величин d_i и данным значениям Δ_i и T_i , которые могут случайным образом изменяться в пределах некоторого интервала их значений.

Если в (1) интеграл заменить какой-либо квадратурной формулой, тогда получим линейную обратную задачу

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{f}, \quad (3)$$

где $\mathbf{A}$ – матрица линейного оператора размера $N \times K$, а $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_K)^T$ – вектор неизвестных значений восстанавливаемого сигнала, K – число моментов времени, в которых восстанавливается сигнал. Очевидно, что число интегральных измерений N меньше числа точек восстановления сигнала K . Поэтому система уравнений (3) является “недоопределенной” и, соответственно, имеет не единственное решение.

Из всех возможных решений системы (3) будем искать решение $\mathbf{f}_0$, минимизирующее квадрат евклидовой нормы невязки

$$\mathbf{J}(\mathbf{f}_0) = \min_{\mathbf{f}} \|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_2^2.$$

Ее решение дает так называемая нормальная система уравнений

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{f} = \mathbf{A}^T \mathbf{d}, \quad (4)$$

где $\mathbf{A}^T$ – транспонированная матрица. Важным свойством системы (4) является то, что она всегда совместна. Поэтому у нее существует решение (называемое также псевдорешением системы (3)), которое можно записать как

$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{d}.$$

Для численного нахождения псевдорешения $\mathbf{f}_0$ вместо непосредственного обращения матрицы $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ применяют так называемое сингулярное разложение матрицы $\mathbf{A}$ (Singular Value Decomposition, или SVD-разложение) [7, 8]. Для этого матрицу $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ представляют в виде

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = (\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{V}^T) = \mathbf{V}\mathbf{Q}(\mathbf{U}^T \mathbf{U})\mathbf{Q}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}\mathbf{Q}^2 \mathbf{V}^T,$$

где $\mathbf{Q}$ – диагональная матрица с элементами $q_i \geq 0$ и размерностью $K \times K$, а $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – ортогональные матрицы размерностью $N \times K$ и $K \times K$ соответственно. Тогда решение системы (4), или псевдорешение системы (3), можно записать в виде

$$\mathbf{f}_0 = (\mathbf{V}\mathbf{Q}^2 \mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V}\mathbf{Q}\mathbf{U}^T \mathbf{d} = \mathbf{V}\mathbf{Q}^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{d}. \quad (5)$$

Анализ спектрального состава сигнала $f(t)$ по измеренному набору его интегральных характеристик можно провести, применив преобразование Фурье к восстановленному по правилу (5) сигналу на всем временном отрезке $[t_b, t_e]$. Информацию о динамике изменения всего спектра отклика среды или его части можно получить, воспользовавшись методикой “скользящего” вдоль временного отрезка $[t_b, t_e]$ окна по отношению к восстановленной с помощью алгоритма (5) функции $f(t)$ (подробнее об этой методике см. [3, 4]).

SVD-восстановление формы сигнала и его спектра

В качестве первого примера восстановления формы сигнала и его спектра рассмотрим функцию

$$f(t) = \sin(1,2t) + e^{-\left(\frac{t-10}{10}\right)^2} \sin(1,5t) + 2e^{-\left(\frac{t-50}{20}\right)^2} \sin(4t), \quad (6)$$

моделирующую сигнал с несущими частотами $\omega_1 = 1,2$, $\omega_2 = 1,5$ и $\omega_3 = 4$. На рис. 2а приведен вос-

становленный SVD-методом сигнал $f(t)$. Исходный сигнал отдельно не приводится, поскольку в масштабах данного рисунка он практически совпадает с восстановленным. Вычисления проводились на отрезке времени $[0, 100]$ с постоянными значениями длины окна $T = 1,5$ и его сдвига $\Delta = 0,1$, которые обеспечили полное отсутствие в спектре восстановленного сигнала посторонних частот. В этом смысле эти значения вычислительных параметров могут быть названы оптимальными. В тех случаях, когда измерительная аппаратура не может обеспечить оптимальные значения параметров восстановления, в [4] предлагается несколько способов исключения ложных частот из спектра.

В качестве второго примера рассмотрим отклик среды (молекулы *L-cystine*) при воздействии реального терагерцового импульса, рассмотренного в [2]. На рис. 2б представлены результаты восстановления отклика среды, полученные на временном интервале $[-5, 20]$ с постоянными шириной окна $T = 1,0$ и сдвигом $\Delta = 0,05$. Для данных значений T и Δ , как и в предыдущем случае, спектр восстановленного сигнала не содержит ложных частот. Для сравнения на рис. 2б также приведен исходный сигнал.

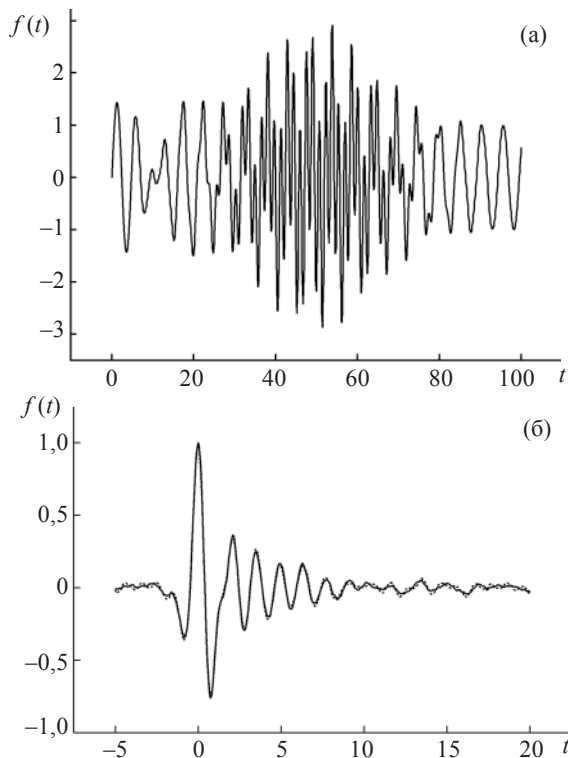


Рис. 2. Форма модельного сигнала (а) и отклик молекулы *L-cystine* (б). Сплошная линия соответствует исходному сигналу, пунктирная линия – SVD-восстановленному.

Заметим, что, кроме требования непрерывности, никаких ограничений на восстанавливаемый сигнал $f(t)$ не накладывается. В ряде случаев это приводит к неединственности SVD-восстановления сигнала. Так, для монотонной на отрезке $[t_b, t_e]$ функции $f(t)$ после SVD-восстановления можно получить кусочно-линейную функцию $f_{\text{SVD}}(t)$. При этом число “ступенек” у нее приблизительно будет равно числу $(t_e - t_b)/T$. Для выяснения природы этих ступенек применяется подход, предложенный в [3, 4], а именно проводятся несколько серий измерений с различными значениями окна $T = \text{const}$. Если исходная функция $f(t)$ была гладкой, то после SVD-восстановления с различными значениями число “ступенек” у функции $f_{\text{SVD}}(t)$ будет изменяться. Если же исходная функция была кусочно-линейной, оно останется тем же. Далее, при изменении числа ступенек и, соответственно, определении свойства гладкости у исходной функции $f(t)$ функцию $f_{\text{SVD}}(t)$ можно сгладить, например, методом наименьших квадратов. На рис. 3 приведена SVD-восстановленная функция $f(t) = 0,01t^2$ с окном $T = 10$ (а) и $T = 5$ (б). Там же приведена функция, полученная в результате сглаживания $f_{\text{SVD}}(t)$ методом наименьших

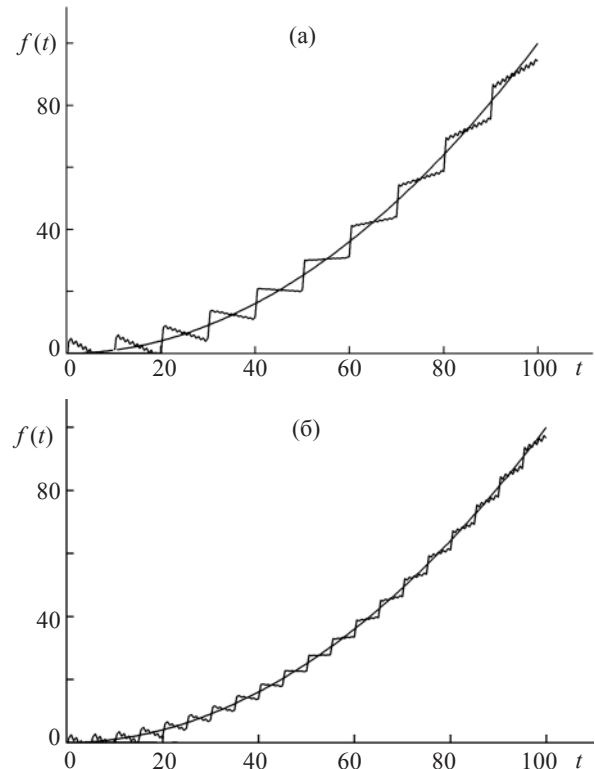


Рис. 3. Функция $f(t) = 0,01t^2$, SVD-восстановленная с окном $T = 10$ (а) и $T = 5$ (б). Гладкая линия на обоих рисунках соответствует функции, сглаженной методом наименьших квадратов.

квадратов. Она практически точно совпала с исходной функцией $f(t) = 0,01t^2$.

Отметим, что для функций постоянных или кусочно-постоянных проблема неединственности при SVD-восстановлении не возникает.

SVD-восстановление профиля пучка

Методика восстановления функции по серии интегральных измерений обобщается применительно к проблеме определения профиля интенсивности пучка. В качестве иллюстрации рассмотрим сначала случай наличия у распределения интенсивности осевой симметрии. Обозначим профиль пучка функцией $f(x, y) = f(r)$, которая непрерывна в круговой области $x^2 + y^2 \leq R^2$ с центром в начале координат. Вместо интегралов (1) рассмотрим выражения

$$d_i = \int_{D_i} f(x, y) dx dy, \quad i = 1, \dots, N, \quad (7)$$

где D_i – сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью $y_i = k_i x + b_i$, параллельной оси Z ; N – число интегральных измерений. Важно подчеркнуть, что плоскости измерений должны частично пересекаться. На практике данные измерения для лазерных пучков осуществляются с помощью оптических волокон [5].

Заменяя интегралы в (7) квадратурными формулами так же, как и выше, получаем линейную обратную задачу $d = Af$ с матрицей A размера $N \times K$. Здесь K – число точек полярной сетки (r_m, φ_l) , в которых восстанавливается функция. В качестве примера на рис. 4 представлены несколько восстановленных аксиально-симметричных функций [3]. Для удобства здесь изображены распределения исходной и SVD-восстановленной функций в сечении $y = 0$. Вычисления проводились в круге радиуса $R = 4$. При этом число не совпадающих по радиусу интегральных измерений составляло $N = 20$, а число точек по каждой полярной координате также было выбрано равным 20. Приведенные примеры показывают высокую точность SVD-восстановления аксиально-симметричных функций.

Распределения интенсивности, не обладающие аксиальной симметрией, удобнее восстанавливать в декартовой системе координат. Пусть $z = f(x, y)$ – неизвестная функция, форму поверхности которой требуется найти в прямоугольной области $\Omega = [x_1, x_2][y_1, y_2]$. В качестве интегральных измерений d_i рассмотрим объемы тонких полос шириной H , каждая из которых получена с помощью двух параллельных секущих плоскостей $y_i^{1,2} = k_i x + b_i^{1,2}$, перпендикулярных плоскости OXY . Для восстановления поверхности $f(x, y)$ вводим в области Ω рав-

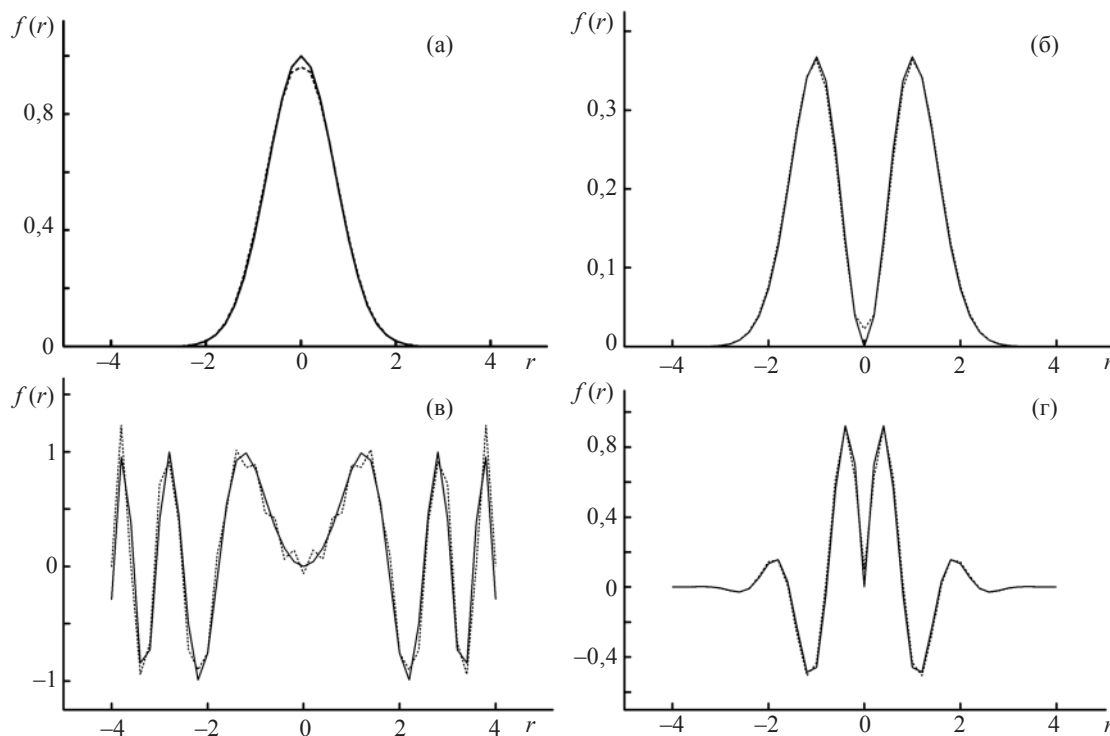


Рис. 4. SVD-восстановленная функция $f(r) = \exp(-r^2)$ – а, $r^2 \exp(-r^2)$ – б, $\sin(r^2)$ – в, $\sin(4r) \exp(-r^2/2)$ – г. Сплошной линией обозначены исходные функции, пунктирной – восстановленные.

номерную по каждому из направлений сетку ω с шагами $h_x = (x_2 - x_1)/L$, $h_y = (y_2 - y_1)/M$ и аппроксимируем объемные интегралы d_i на сетке какой-либо квадратурной формулой. Получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{d} = \mathbf{A}\mathbf{f} \quad (8)$$

с матрицей $\mathbf{A}$ размера $N \times K$, где N – число интегральных измерений (объемных полос), $K = (L + 1)(M + 1)$ – число точек сетки ω , в которых восстанавливается поверхность $f(x, y)$. Аналогично предыдущим случаям число интегральных измерений N меньше числа точек сетки K , поэтому задача имеет не единственное решение. Систему уравнений (8) будем решать SVD-методом совместно со стандартной регуляризацией по Тихонову [9], т. е. искать вектор $\mathbf{f}_0$, минимизирующий следующий функционал:

$$F_\alpha(\mathbf{f}_0) = \min_{\mathbf{f}} (\|\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{f}\|_2^2 + \alpha \|\mathbf{f}\|_2^2), \quad (9)$$

где $\alpha > 0$ – параметр тихоновской регуляризации. Нетрудно показать, что если $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{Q}\mathbf{V}^T$ – сингуляр-

ное разложение матрицы $\mathbf{A}$, то решение $\mathbf{f}_0$ задачи (9) находится по формуле

$$\mathbf{f}_0 = \mathbf{V}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{U}^T\mathbf{d}, \quad (10)$$

где $\tilde{\mathbf{Q}}$ – диагональная матрица с элементами $\tilde{q}_i = q_i/(q_i^2 + \alpha)$, $q_i \geq 0$ – сингулярные числа матрицы $\mathbf{A}$. Отметим также, что ширина измерительной полосы H выбиралась таким образом, чтобы она была меньше соответствующих шагов интегрирования по координатам, т. е. $H < \min(h_x, h_y)$. Это обеспечивает наилучшую точность используемого метода.

На рис. 5 приведены примеры SVD-восстановления нескольких профилей интенсивности, которые задавались аналитически, и от них считались соответствующие интегралы вдоль секущих плоскостей. Восстановление проводилось с различными значениями параметра регуляризации α . Вычисления показали, что использование стандартной регуляризации по Тихонову с параметром $\alpha = 10^{-6} - 10^{-3}$ не влияло на устойчивость решения и не приводило к какому-либо увеличению точности восстановления, т. е. не приводило к росту устойчивости алгоритма.

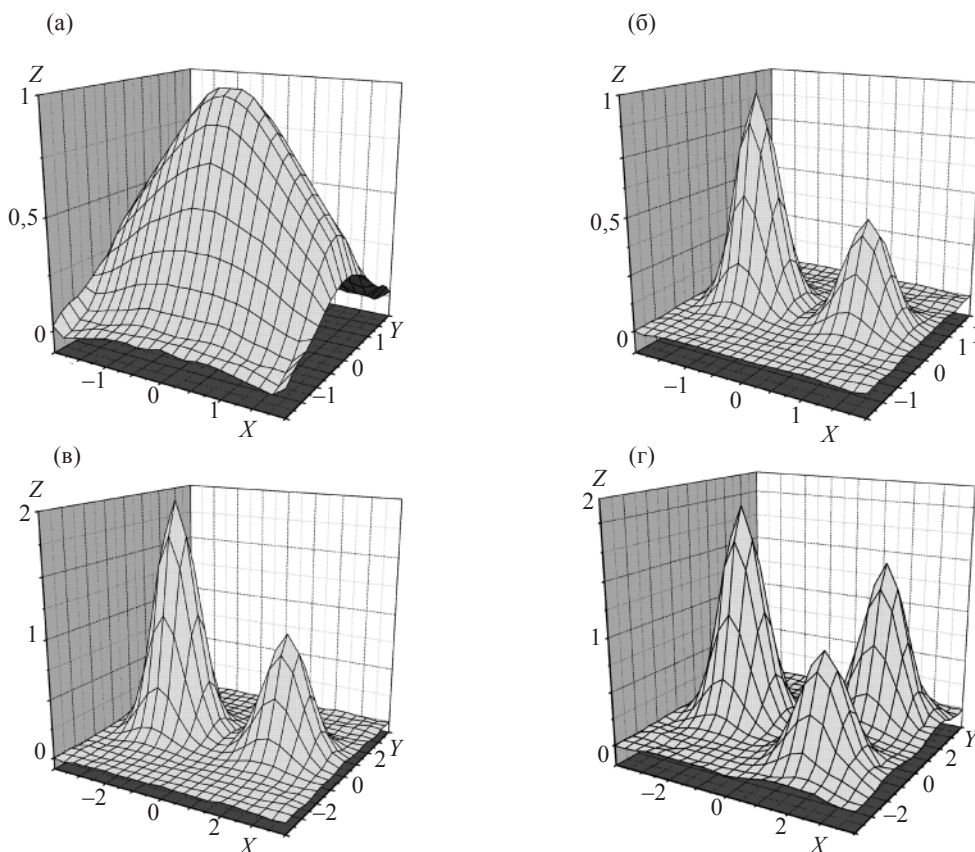


Рис. 5. Профиль SVD-восстановленного пучка $F(x, y) = \exp(-((x/2)^2 + y^2))$ – а, $\exp(-((x - 1)^2 + y^2))$ – б, $\exp(-((x - 2)^2 + y^2)) + 2\exp(-((x + 2)^2 + y^2))$ – в, $\exp(-((x - 2)^2 + (y + 2)^2)) + 1,5\exp(-((x - 2)^2 + (y - 2)^2)) + 2\exp(-((x + 2)^2 + y^2))$ – г в области $\Omega = [-2, 2] \times [-2, 2]$, $L = M = 20$ (а, б); $\Omega = [-4, 4] \times [-4, 4]$, $L = M = 40$ (в, г). Число интегральных измерений $N = 241$ (а), 217 (б), 721 (в, г).

Для устойчивого восстановления профиля пучка в приведенном выше алгоритме (9), (10) вполне достаточно использовать только сингулярное разложение матрицы системы с соответствующим выбором сингулярных чисел. Погрешность восстановления формы пучка $\delta = \|f - f_{\text{SVD}}\|_C / \|f\|_C$ в худшем случае (рис. 5а, 5б) не превышает 3%, что говорит о высокой точности SVD-метода при сравнительно небольшом (по сравнению с числом точек сетки) числе интегральных измерений. В других случаях (рис. 5в, 5г) погрешность восстановления распределения была меньше 1,5%. Отметим, что метод оптической томографии дает значительно большую (порядка 23%) погрешность при реконструкции формы пучка (см. [5]) и, как отмечают авторы работы, нуждается в существенной доработке.

Выводы

Развиваемый алгоритм позволяет по одной серии интегральных измерений энергии излучения лазера восстановить в одномерном случае форму импульса и его спектральный состав, а также проследить эволюцию спектральных амплитуд как отдельных частот, так и всего спектра. Это особенно важно для бурно развивающейся в настоящее время терагерцовой спектроскопии [10–15].

На его основе проведено восстановление как аксиально-симметричных распределений интенсивности, так и профилей пучка общего вида, показавшее высокую точность предложенного метода, которую в настоящее время невозможно достичь на основе методов оптической томографии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 05-01-507).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Cohen.L.* Time-frequency distributions // *Proc. IEEE.* 1989. V. 77. № 7. P. 941–981.
2. *Сафонов В.Н., Трофимов В.А., Шкуринов А.П.* О точности измерения мгновенных спектральных интенсив-

ностей фемтосекундных импульсов // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. В. 4. С. 78–85.

3. *Trofimov V.A., Varentsova S.A.* New method for analysis of temporal dynamics of medium spectrum under the action of terahertz pulse // *Proc. SPIE.* 2007. V. 6537. P. 653703.
4. *Варенцова С.А., Трофимов В.А.* Восстановление сигнала и его мгновенных спектральных характеристик методом скользящих окон // *ЖТФ.* 2007. Т. 77. В. 5. С. 58–64.
5. *Булыгин Ф.В., Горяинова И.В., Ковалев А.А., Марамзин К.Д.* Измерение распределения интенсивности в лазерном пучке методом оптической томографии // *ЖТФ.* 2007. Т. 77. В. 7. С. 87–90.
6. *Trofimov V.A., Troshchiev Yu.V., Varentsova S.A.* Highly effective method for temporal terahertz spectroscopy under the condition of random probe signals // *Proc. SPIE.* 2007. V. 6727. P. 67271H.
7. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. М.: Мир, 1989. 655 с.
8. *Воеводин В.В.* Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977. 303 с.
9. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 284 с.
10. *Nazarov M.M., Mukina L.S., Shuvaev A.V., Sapozhnikov D.A., Shkurinov A.P., Trofimov V.A.* Excitation and propagation of surface electromagnetic waves studied by terahertz spectrochronography // *Laser Phys. Lett.* 2005. V. 2. № 10. P. 471–475.
11. *Berry E., Boyle R.D., Fitzgerald A.J., Handley J.W.* Time frequency analysis in terahertz pulsed imaging // *Computer Vision Beyond the Visible Spectrum* / Ed. Bir Bhanu and Ioannis Pavlidis. Series: Advances in Pattern Recognition. Springer–Verlag, 2005. V. 13. P. 290–329.
12. *Smye S.W., Chamberlain J.M., Fitzgerald A.J., Berry E.* The interaction between Terahertz radiation and biological issue // *Phys. Med. Biol.* 2001. V. 46. P. R101–R112.
13. *Berry E.* Risk perception and safety issues // *Biol. Phys.* 2003. V. 129. P. 263–267.
14. *Прохоров А.С., Анзин В.Б., Витухновский Д.А. и др.* Терагерцовая спектроскопия спиновых стекол AuFe // *ЖЭТФ.* 2006. Т. 130. В. 6(12). С. 1027–1034.
15. *Zandonella C.* Terahertz imaging: T-ray specs // *Nature.* 2003. V. 424. P. 721–722.