

ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ НА РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ОПТИЧЕСКИХ ИМПУЛЬСОВ В ИЗОТРОПНЫХ ДИЭЛЕКТРИКАХ

© 2004 г. С. В. Сазонов, доктор физ.-мат. наук; В. А. Халяпин

Калининградский государственный университет, Калининград
E-mail: nst@alg.kaliningrad.ru

На основе метода "усредненного лагранжиана", а также использования параксиального и безабберационного приближений исследовано влияние дифракции на распространение предельно коротких оптических импульсов в изотропном диэлектрике. Показано, что дифракция способна компенсировать явление самофокусировки, если число колебаний, содержащихся в импульсе, превышает определенное критическое значение.

Коды OCIS: 320.7110, 320.7130.

Поступила в редакцию 13.01.2004.

1. Введение

С развитием лазерных систем, позволяющих генерировать импульсы вплоть до нескольких периодов колебаний светового поля (предельно коротких импульсов (ПКИ)) [1], появился интерес к теоретическому исследованию взаимодействия таких импульсов с веществом [2, 3]. Не в последнюю очередь данный интерес обусловлен возможным использованием ПКИ в оптических системах передачи и обработки информации.

В работе [3] исходя из полуфеноменологической модели материального отклика было получено уравнение

$$\frac{\partial E}{\partial z} - a \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + b \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau' + g E^2 \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{c}{2n} \Delta_{\perp} \int_{-\infty}^{\tau} E d\tau, \quad (1)$$

описывающее распространение ПКИ вдоль произвольной оси в изотропном широкозонном диэлектрике. Здесь E – напряженность электрического поля ПКИ, $\tau = t - nz/c$ – локальное время в сопутствующей системе координат, c – скорость света в вакууме, n – линейный низкочастотный показатель преломления среды, коэффициенты a и b определяют соответственно электронную и ионную дисперсии среды, последнее слагаемое в левой части обусловлено электронной кубической нелинейностью. Правая часть описывает влияние поперечных возмущений, включая дифракцию, в параксиальном приближении.

Подчеркнем, что уравнение (1) записано не для огибающей импульса, а непосредственно для его электрического поля E . По понятным причинам в случае ПКИ приближение медленно меняющейся огибающей (ММО) неприменимо. С другой стороны, следует заметить, что область использования уравнения (1) достаточно широка: от ПКИ до квазимонохроматических импульсов, содержащих большое количество оптических колебаний.

В настоящей работе рассмотрен вопрос о самофокусировке и дефокусировке импульсов, эволюция которых описывается уравнением (1).

2. Влияние дифракции на распространение квазимонохроматических импульсов

В пределе импульсов, содержащих большое число колебаний, из (1) можно получить нелинейное уравнение Шредингера (НУШ) для медленно меняющейся огибающей ϵ [3], определяемой из равенства

$$E = \frac{1}{2} \epsilon \exp[i(\omega\tau - qz)] + \text{к.с.}, \quad (2)$$

где ω – несущая частота, q – волновое число импульса в сопутствующей системе координат. Данное уравнение имеет вид

$$i \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \alpha \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial T^2} - \beta |\epsilon|^2 \epsilon = \frac{c}{2n\omega} \Delta_{\perp} \epsilon, \quad (3)$$

где $\alpha = 3a(\omega_c^4 - \omega^4)/\omega^3$, $\beta = \omega g/4$, $T = \tau - 3a\omega^2[1 + (\omega_c^4/\omega^4)]z = t - z/v_g$, v_g – линейная групповая скорость. Поведение импульса, описываемого уравнением (3), будем исследовать с помощью усредненного вариационного принципа типа Ритца–Уизема [4, 5].

Лагранжиан уравнения (4) имеет вид

$$L = \frac{i}{2} \left(\epsilon^* \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \epsilon \frac{\partial \epsilon^*}{\partial z} \right) + \alpha \left| \frac{\partial \epsilon}{\partial T} \right|^2 - \frac{\beta}{2} |\epsilon|^4 + \frac{c}{2n\omega} |\nabla_{\perp} \epsilon|^2. \quad (4)$$

Как известно, односолитонное решение НУШ (3) без учета дифракции имеет вид (см., например, [4])

$$\epsilon = \frac{1}{\tau_p} \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \exp(-i\alpha/\tau_p^2) \operatorname{sech}(T/\tau_p).$$

Здесь τ_p – свободный параметр, определяющий длительность импульса.

Руководствуясь этим обстоятельством, пробное решение для (3) представим в виде

$$\epsilon = \rho \sqrt{\frac{2\alpha}{\beta}} \operatorname{sech}(\rho T) \exp(-i\varphi). \quad (5)$$

В нашем приближении $\varphi(z, r_\perp)$ и $\rho(z, r_\perp)$ – подлежащие определению функции координат, а частота ω входит как параметр, причем φ имеет смысл солитонного эйконала.

Подставим (5) в (4) и после интегрирования по t получим “усредненный лагранжиан”

$$\Lambda = B^2 \left(2\rho \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{2\alpha}{3} \rho^3 + \frac{c}{n\omega} \rho (\nabla_\perp \varphi)^2 \right) - \frac{2\beta}{3} B^4 \rho^3 + \left(\frac{\pi^2}{6} + 2 \right) \frac{c}{6n\omega \rho} B^2 (\nabla_\perp \rho)^2. \quad (6)$$

Записывая для (6) уравнения Эйлера–Лагранжа относительно φ и ρ , будем иметь

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} + \nabla_\perp (\rho \nabla_\perp \varphi) = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{(\nabla_\perp \varphi)^2}{2} + \int \frac{d\rho}{\rho} = Q(\rho, (\nabla_\perp \rho)^2, \Delta_\perp \rho), \quad (8)$$

где $\Phi = c\varphi/n$,

$$Q = \frac{1}{2} \left(\frac{c}{n\omega} \right)^2 \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{\Delta_\perp \rho}{\rho} - \frac{(\nabla_\perp \rho)^2}{2\rho^2} \right), \quad (9)$$

а связь между динамическими параметрами P и ρ определяется уравнением

$$\frac{dP}{d\rho} = -\frac{2c}{n\omega} \alpha \rho^2 < 0. \quad (10)$$

Правая часть (8) описывает эффекты дифракции в поперечной динамике импульса. Пренебрежение правой частью (8) соответствует эйкональному приближению. В этом случае система (7), (8) принимает вид уравнений гидродинамики идеальной жидкости ((7) имеет смысл интеграла Коши, (8) – уравнения непрерывности). Тогда P имеет смысл “давления”, ρ – “плотности” воображаемой идеальной жидкости, а Φ – потенциала скорости. Критерий устойчивости по отношению к самофокусировке может быть записан в виде условия устойчивого течения данной “идеальной жидкости”: $dP/d\rho > 0$ [6, 7], который в нашем случае, как видно из (10), не выполняется. Следовательно, на эйкональной стадии солитон огибающей вида (5) подвержен самофокусировке.

Учтем теперь вклад правой части (8) (дифракции) в динамику импульса. Считая солитон аксиально симметричным в плоскостях поперечных сечений, представим ρ и Φ в автомодельном виде [8]

$$\rho = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \exp\left(-\frac{r^2}{R^2}\right), \quad (11)$$

$$\Phi = f_1 + f_2 \frac{r^2}{2} + \dots, \quad (12)$$

где R, f_1, f_2 – являются функциями от z , а R_0 – имеет смысл поперечного радиуса входного сигнала.

Здесь мы предполагаем, что автомодельная зависимость $\rho(r, z)$ вида (10) сохраняется на протяжении динамики. Данное предположение соответствует безабберационному приближению [9].

Подставляя (11), (12) в (7), получаем

$$f_2 = R'/R, \quad (13)$$

где штрих обозначает производную по z .

Будем, следуя [8, 9], рассматривать приосевую область, что соответствует неравенству $r^2/R^2 < 1$. После подстановки (11), (12) в (8), дальнейшего разложения в ряд по $(r/R)^2$ и приравнивания в обеих частях выражений при нулевой и второй степенях r , найдем

$$f_1' = \frac{c\alpha}{n\omega} \rho_0^2 \frac{R_0^4}{R^4} - 2 \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{c}{n\omega} \right)^2 \frac{1}{R^2},$$

$$f_2' + f_2^2 = -\frac{4c\alpha}{n\omega} \rho_0^2 \frac{R_0^4}{R^6} + 2 \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{c}{n\omega} \right)^2 \frac{1}{R^4}.$$

Подставляя в последнее уравнение (12), будем иметь

$$R'' = -\frac{4c}{n\omega} \alpha \frac{R_0^4 \rho_0^2}{R^5} + 2 \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{2}{3} \right) \left(\frac{c}{n\omega} \right)^2 \frac{1}{R^3}. \quad (14)$$

Последнее слагаемое в правой части описывает дифракцию. Уравнение (14) формально совпадает со вторым законом Ньютона для частицы единичной массы в поле потенциальных сил с краевыми условиями $R(0) = R_0$, $R'(0) = 0$. Последнее условие следует из (13) и того предположения, что фронт входного сигнала предполагается плоским: $f_2(0) = 0$.

Как легко видеть из (14), дефокусировка имеет место при условии $R''(0) > 0$. Отсюда и из (14) находим критерий на входные параметры квазимонохроматического импульса, при которых он будет испытывать дефокусировку

$$R_0^2 \rho_0^2 < D_c \equiv 0,2 \frac{c}{na} \frac{\omega^2}{\omega_c^4 - \omega^4}, \quad (15)$$

где $\omega_c = (b/3a)^{1/4}$ – критическая частота, соответствующая фиолетовой границе области аномальной дисперсии, а $R_0^2 \rho_0^2$ – величина, пропорциональная мощности импульса. Таким образом, при ограничении сверху на мощность вида (15), дифракция способна препятствовать явлению самофокусировки.

3. Учет дифракции в случае импульсов, содержащих произвольное число колебаний

Методику расчетов, использованную в разд. 2 для НУШ, применим теперь к солитоноподобным решениям уравнения (1). Последнему соответствует лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{g}{12} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} \right)^4 + \frac{a}{2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \right)^2 - \frac{b}{2} U^2 - \frac{c}{4n} (\nabla_{\perp} U)^2, \quad (16)$$

где $E = \partial U / \partial \tau$.

В силу того что импульс считается экспоненциально локализованным, пробное решение представим в виде

$$U = A \operatorname{sech} \left[\gamma \left(\tau - \frac{z}{V} \right) \right] \cos [\omega (\tau - \varphi)]. \quad (17)$$

Здесь $\varphi(z, r_{\perp})$ и $\gamma(z, r_{\perp}) = 2/\tau_p$ — подлежащие определению функции координат, величина A определяется выражением [10]

$$A^2 = 168 \frac{a}{g} \gamma^2 \frac{5\omega_c^4 - (5\omega^2 + \gamma^2)(\omega^2 + \gamma^2)}{(\omega^2 + \gamma^2)(3\gamma^4 + 14\omega^2\gamma^2 + 35\omega^4)}, \quad (18)$$

а параметр $1/V$ следующим образом связан с групповой скоростью v_g :

$$\frac{1}{v_g} = \frac{n}{c} + \frac{1}{V} = \frac{n}{c} + a(3\omega^2 - \gamma^2) + \frac{b}{\omega^2 + \gamma^2}. \quad (19)$$

Подставляя (17)–(19) в (16) и интегрируя по τ , получим “усредненный лагранжиан”

$$\Lambda = \Lambda_e + \Lambda_d, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_e = & -\frac{\omega^2 A^2}{2\gamma} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{c}{2n} (\nabla_{\perp} \varphi)^2 \right] + \frac{a A^2}{2} \left[\frac{4\gamma^3}{5} + \gamma \omega^2 + \right. \\ & \left. + \frac{\omega^4}{\gamma} - \omega_c^4 \left(\frac{3}{\gamma} + \frac{\gamma}{\omega^2 + \gamma^2} \right) \right] + \frac{g}{12} A^4 \left(\frac{3\gamma^3}{70} + \frac{\gamma \omega^2}{5} + \frac{\omega^4}{2\gamma} \right), \quad (21) \\ \Lambda_d = & -\frac{c}{4n} \left(\left(\frac{\partial A}{\partial \gamma} \right)^2 + \frac{A^2}{6\gamma^2} \left(\frac{\pi^2}{6} + 2 \right) - \frac{\partial A^2}{\partial \gamma^2} \right) \frac{(\nabla_{\perp} \gamma)^2}{\gamma}. \end{aligned}$$

Варьируя (20) по φ и γ , получим систему уравнений Эйлера–Лагранжа, совпадающую по форме с системой (7), (8). При этом $\rho = A^2/\gamma$, $\Phi = c\varphi/n$, а выражение для функции Q , а также уравнение, выражающее связь между P и ρ , здесь значительно более громоздко, чем (9), и по этой причине здесь не приводится.

Здесь также рассмотрим приосевую динамику импульса, поэтому решение для Φ и ρ будем искать в виде (11), (12) с дальнейшим использованием разложений по $(r/R)^2$.

Обратную длительность γ представим в виде

$$\gamma = F_1 - F_2 + F_2 \exp(-r^2/R^2), \quad (22)$$

где F_1 и F_2 являются функциями от z . Из (22) получаем

$$\gamma(r=0, R=R_0) = \gamma_0 = F_1, \quad (23)$$

где γ_0 — параметр, пропорциональный входной обратной длительности импульса в центре. Поступая в дальнейшем аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе, для радиуса импульса получим уравнение

$$R'' = \frac{4cF_2^2}{n\omega^2 F_1 R} (D - G_1 - G_2 - G_3), \quad (24)$$

где

$$D = c \left((F_1^3 - 7F_2^2 F_1 + 6F_2^3) / F_1^2 F_2^2 + (\pi^2 + 12)(7F_1 - 6F_2) / 9F_1^2 \right) / 4nR^2,$$

$$G_1 = aF_1 (16F_1^3 + 10\omega^2 F_1 + 24F_1^2 F_2 + 5F_2 \omega^2) / 5,$$

$$G_2 = aF_1 \omega_c^4 (3\omega^2 F_1^2 F_2 - 2F_1 \omega^4 - \omega^4 F_2 - 2\omega^2 F_1^3) / F_2 (\omega^2 + F_1^2)^3,$$

$$G_3 = g\rho_0^2 R_0^4 (39F_1^4 F_2 + 21F_1^5 + 42\omega^2 F_1^3 - 35F_1 \omega^4 + 3F_1^3 F_2^2 + 84\omega^2 F_1^2 F_2) / 420F_2 R^4 + g\rho_0^2 R_0^4 (2\omega^2 F_1 F_2^2 + 15\omega^4 F_2 + 5\omega^4 F_2^2 / F_1) / 60F_2 R^4.$$

Первое слагаемое в скобках правой части (24) описывает влияние дифракции, остальные три соответствуют эйкональному приближению.

Подставляя (18) в выражение для ρ и приравнявая члены при равных степенях r , получим систему, определяющую связь между F_1 и F_2

$$\frac{168aF_1}{g} \frac{5\omega_c^4 - (5\omega^2 + F_1^2)(\omega^2 + F_1^2)}{(\omega^2 + F_1^2)(35\omega^4 + 14\omega^2 F_1^2 + 3F_1^4)} = \rho_0 \frac{R_0^2}{R^2} \equiv u, \quad (25)$$

$$F_2 = \frac{ug(\omega^2 + F_1^2)(35\omega^4 + 14\omega^2 F_1^2 + 3F_1^4)}{168a(5(\omega_c^4 - \omega^4) - 18\omega^2 F_1^2 - 5F_1^4) - 2ugF_1(49\omega^4 + 34\omega^2 F_1^2 + 9F_1^4)}. \quad (26)$$

В пределе квазимонохроматических импульсов $(\gamma/\omega)^2 \ll 1$ из (25) и (26) следует, что $F_2 = F_1$. Кроме того, в данном пределе $\gamma \sim \rho$, а уравнение (24) переходит в (14), описывающее поперечную динамику солитона НУШ.

Из выражения для D видно, что данная величина может быть как положительной, так и отрицательной. В первом случае дифракция препятствует самофокусировке, во втором, наоборот, способствует.

Минимальное число колебаний N_m , содержащихся в ПКИ, при котором дифракция все еще способна компенсировать явление самофокусировки, можно получить из условия $D > 0$ (см. (22)). Тогда $(F_2/F_1)^3 - 1,167F_2/F_1 - 0,117 < 0$. Решая данное кубическое неравенство, находим $F_2/F_1 < 1,128$. Подставляя сюда (25) и (26), используя (23) и оставляя в числителе и знаменателе члены вплоть до второго порядка малости по γ/ω , получим

$$\frac{\gamma}{\omega} < 1,04 \sqrt{\frac{\omega_c^4 - \omega^4}{25,2\omega_c^4 - \omega^4}} \approx 0,21 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^4}. \quad (27)$$

С учетом того что период световых колебаний, заполняющих данный импульс, можно определить как $T = 2\pi/\omega$, а длительность соотношением $\tau_p = 2/\gamma$, из (27) будем иметь

$$N = \frac{\tau_p}{T} > N_m = \frac{1,54}{\sqrt{1 - (\omega/\omega_c)^4}}. \quad (28)$$

Отсюда видно, что абсолютно минимальное значение числа колебаний, при котором дифракция еще может играть конструктивную роль, равно 1,54. Если же $\omega \rightarrow \omega_c$, то $N_m \rightarrow \infty$. В этом случае справедливо приближение ММО, но из анализа влияния дифракции на солитон НУШ не следует вывод о деструктивной роли дифракции при $N < N_m$. Данный факт легко объяснить, так как при $\omega \rightarrow \omega_c$ дисперсия второго порядка стремится к нулю. Здесь необходим учет дисперсии третьего порядка и дисперсии нелинейности, что соответствует выходу за пределы применимости НУШ.

Абсолютное минимальное значение длительности импульса, как легко показать, используя (27), $\tau_p^{\min} = 15,63/\omega_c$; соответствующая частота $\omega_m = 0,76\omega_c$. Взяв для кварцевого стекла $\omega_c = 1,47 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$ [3], найдем $\tau_p^{\min} = 10,6 \text{ фс}$, $\omega_m = 1,12 \times 10^{15} \text{ с}^{-1}$. При этом $N_m = 1,6$.

Деструктивную роль дифракции при $N < N_m$ можно объяснить, исходя из следующих соображений. Вклад дифракции в динамику импульса определяется безразмерным параметром $\epsilon = \lambda/R$ (λ – характерная длина волны). При самофокусировке квазимонохроматического солитона огибающей его длина волны практически не изменяется, так как, несмотр-

я на самосжатие, в нем содержится все еще много колебаний. В то же время $R \rightarrow 0$, что приводит к увеличению ϵ , а вместе с тем – к возрастанию роли дифракции. Для ПКИ (если N удовлетворяет условию (28)) уменьшение радиуса импульса сопровождается вследствие самосжатия уменьшением λ (смещением спектра в фиолетовую область и его уширением), что приводит к тому, что параметр ϵ увеличивается не так быстро. Здесь дифракция все еще способна компенсировать самофокусировку при определенных условиях на входные параметры импульса. Если же число колебаний, содержащихся в ПКИ, меньше N_m , то при $R \rightarrow 0$ параметр λ стремится к нулю еще быстрее, что приводит к уменьшению ϵ , а следовательно, к уменьшению роли дифракции. В этом случае дифракция не способна компенсировать самофокусировку.

4. Заключение

Проведенное в настоящей работе исследование выявляет существенные отличия влияния дифракции на квазимонохроматические импульсы с ярко выраженной несущей частотой от соответствующего влияния на импульсы длительностью в несколько периодов N колебаний светового поля. В первом случае дифракция играет конструктивную роль, т. е. препятствует самофокусировке при мощности ниже определенной пороговой. Если же число колебаний $N < N_m$ (см. (28)), дифракция ни при каких значениях мощности импульса уже не способна компенсировать самофокусировку. Качественное изменение роли дифракции при $N < N_m$ говорит о том, что волновые фронты ПКИ гораздо более чувствительны к абберациям, нежели фронты квазимонохроматических импульсов. Дальнейшее исследование может потребовать отказа от безабберационного приближения. В [11] показано, что на заключительной стадии самофокусировки ПКИ становятся существенными эффекты непараксиальности. В дальнейшем мы надеемся учесть данные эффекты в рамках нашего аналитического подхода.

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 02-02-17710а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Желтиков А.М. Сверхкороткие световые импульсы в полых волноводах // УФН. 2002. Т. 172. С. 743.
2. Маймистов А.И. Некоторые модели распространения предельно коротких электромагнитных импульсов в нелинейной среде // Квант. электрон. 2000. Т. 24. С. 287–303.
3. Козлов С.А., Сазонов С.В. Нелинейное распространение импульсов длительностью в несколько колебаний

- светового поля в диэлектрических средах // ЖЭТФ. 1997. Т. 111. № 2. С. 404–418.
4. *Anderson D.* Variational approach to nonlinear pulse propagation in optical fiber // *Phys. Rev. A*. 1983. Т. 27. С. 3135–3145.
5. *Жданов С.К., Трубников Б.А.* Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991. 176 с.
6. *Сазонов С.В.* О предельно коротких и квазимонохроматических электромагнитных солитонах в двухкомпонентной среде // ЖЭТФ. 2001. Т. 119. № 3. С. 419–433.
7. *Сазонов С.В.* Сверхсветовые электромагнитные солитоны в неравновесных средах // УФН. 2001. Т. 171. № 6. С. 663–677.
8. *Карлов Н.В., Кириченко Н.А.* Колебания, волны, структуры. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. С. 364–370.
9. *Ахманов С.А., Вислоух В.А., Чиркин А.С.* Оптика фемтосекундных лазерных импульсов. М.: Наука, 1988. 310 с.
10. *Сазонов С.В., Халяпин В.А.* О квазисолитонном распространении импульсов длительностью в несколько периодов оптических колебаний в изотропных диэлектриках // Опт. и спектр. 2003. Т. 95. № 3. С. 429–434.
11. *Козлов С.А., Петрошенко П.А.* Самоделение импульса из нескольких колебаний светового поля в нелинейной среде с дисперсией // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. С. 241–245.
-