

МЕТОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ ИЗ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ БРУСЬЕВ С СЕЧЕНИЕМ ПРАВИЛЬНОГО МНОГОУГОЛЬНИКА

© 2008 г. А. С. Соловьев; И. С. Нефедов, доктор физ.-мат. наук

Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, Саратов

E-mail: andreisol@rambler.ru

Рассмотрена дифракция электромагнитной волны на решетке, состоящей из параллельных диэлектрических брусьев с сечением правильного многоугольника. Задача решается методом интегральных уравнений. Логарифмическая сингулярность ядра интегрального уравнения выделяется в явной форме, что позволяет использовать квадратурные формулы наивысшей точности и свести интегральное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений. Результатом этих аналитических преобразований является хорошая сходимость алгоритма. В работе представлены полученные с помощью описанного алгоритма угловые и спектральные зависимости коэффициента пропускания для различных форм поперечного сечения диэлектрических брусьев.

Коды OCIS: 050.0050, 050.1940.

Поступила в редакцию 30.03.2007.

Введение

Диэлектрические брэгговские решетки находят широкое применение в различных оптоэлектронных системах: фильтрах, передатчиках, усилителях, частотных преобразователях и т. д. [1]. Задача дифракции света на решетке, состоящей из параллельных диэлектрических брусьев, до сих пор остается актуальной [2, 3]. При решении задач дифракции электромагнитной волны на периодических диэлектрических структурах используются различные численные и полуаналитические методы [3–5]. Среди них выделяются методы, сводящие задачу граничных условий к решению интегральных уравнений (ИУ) [6–8]. Основными их преимуществами являются высокая точность, низкие требования к вычислительным ресурсам, а также возможность проведения аналитических преобразований, улучшающих

сходимость алгоритма. При этом могут использоваться как объемные, так и поверхностные интегральные уравнения [3]. Решение поверхностных ИУ требует меньших затрат вычислительных ресурсов, но объемные ИУ проще и позволяют непосредственно найти распределение электрического поля внутри диэлектрика.

В настоящей статье рассматривается дифракция Е-поляризованной электромагнитной волны на решетке, состоящей из диэлектрических брусьев с сечением правильного многоугольника. Представлены спектральные и угловые зависимости коэффициентов пропускания для различных поперечных сечений диэлектрических брусьев. Эти данные могут быть использованы для определения формы поперечного сечения диэлектрических брусьев. Коэффициенты пропускания решетки, состоящей из цилиндров с круговым поперечным сечением, были получены Ф.Г. Богдановым и Г.С. Кеванишвили [2]. Сравнение результатов приведено в табл. 1.

Таблица 1. Сравнение результатов (при $\epsilon_0 = 1$, $d/\lambda = 0,5$)

ϵ_2	θ	$2r/d$	Результаты [2]	Наши результаты
2,1	0	0,25	0,996579	0,9965788
2,1	0	0,5	0,975028	0,9750275
2,1	0	0,75	0,990497	0,990497
2,1	60	0,25	0,981983	0,9819877
2,1	60	0,5	0,785866	0,7859282
2,1	60	0,75	0,320571	0,3213180
5,4	0	0,25	0,928648	0,9286475
5,4	0	0,5	0,884717	0,8847234
5,4	0	0,75	0,813697	0,8135704

Метод интегральных уравнений

Рассмотрим диэлектрическую решетку, состоящую из цилиндрических брусьев, бесконечную вдоль оси z и периодическую вдоль оси x с периодом d . Решетка из брусьев с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 расположена в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ_0 (рис. 1). Форма поперечного сечения цилиндров в виде правильного многоугольника взята для простоты и не является существенной в рамках нашего метода. Представ-

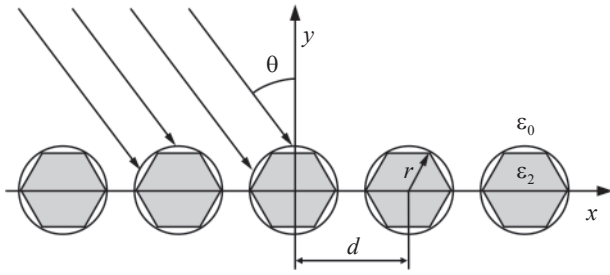


Рис. 1. Геометрия структуры.

ленный алгоритм позволяет решить данную задачу для любой формы поперечного сечения брусьев.

Волновой вектор падающей под углом θ волны лежит в плоскости xy , вектор напряженности электрического поля направлен вдоль оси z (**E**-поляризация). Временная зависимость выбрана в виде $\exp(i\omega t)$. Уравнение Гельмгольца для электрического поля $E = E_z$ имеет вид

$$\left[\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + k^2 \varepsilon(x, y) \right] E(x, y) = 0, \quad (1)$$

где k – волновое число в свободном пространстве. Поле падающей волны можно записать в виде

$$E_0(x, y) = \exp[-i(k_x x - \alpha_0 y)], \quad (2)$$

где $k_x = k \sin \theta$, $\alpha_0 = k \cos \theta$, θ – угол падения волны. Отраженное поле представим в виде разложения Фурье

$$E_r(x, y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\alpha m} \exp[-i(\beta_m x + \alpha y)] d\alpha, \quad (3)$$

где $\beta_m = k_x + 2\pi m/d$ ($k_x = \beta_0$). Обратное преобразование Фурье имеет вид

$$A_{\alpha m} = (1/2\pi d) \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^d E_r(x, y) \exp[i(\beta_m x + \alpha y)] dx dy. \quad (4)$$

Уравнение (1) может быть записано следующим образом:

$$(\nabla^2 + k^2 \varepsilon_0) E(x, y) + k^2 [\varepsilon(x, y) - \varepsilon_0] E(x, y) = 0. \quad (5)$$

Полное электрическое поле имеет вид

$$E(x, y) = E_0(x, y) + E_r(x, y). \quad (6)$$

Падающая волна удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} (\nabla^2 + k^2 \varepsilon_0) E_0(x, y) = \\ = \left[-(\alpha_0^2 + \beta_0^2) + k^2 \varepsilon_0 \right] E_0(x, y) \equiv 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (3) и (4) в (1) и принимая во внимание (6) и (7), получим

$$-(\alpha^2 + \beta_m^2) A_{\alpha m} + k^2 \varepsilon_0 A_{\alpha m} + (k^2/2\pi d) \int_D (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) E(x, y) \exp[i(\beta_m x + \alpha y)] dx dy = 0 \quad (8)$$

и

$$A_{\alpha m} = \left[k^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) / 2\pi d (\alpha^2 + \beta_m^2 - k^2 \varepsilon_0) \right] \int_D E(x, y) \exp[i(\beta_m x + \alpha y)] dx dy, \quad (9)$$

где область D является поперечным сечением цилиндров. Таким образом, отношение (9) выражает амплитуды гармоник отраженной волны через значения напряженности полного поля внутри диэлектрических цилиндров. Запишем полное поле в виде

$$\begin{aligned} E(x, y) = E_0(x, y) + \\ + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\alpha m} \exp[-i(\beta_m x + \alpha y)] d\alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

тогда, подставляя (9) и (10) и вычисляя интеграл по $d\alpha$ с помощью вычетов, получим

$$E(x, y) = E_0(x, y) + \frac{k^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0)}{2d} \int_D \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\exp[-i\beta_m (x - x') - \gamma_m |y - y'|]}{\gamma_m} E(x', y') dx' dy', \quad (11)$$

где $\gamma_m = \sqrt{\beta_m^2 - k^2 \varepsilon_0}$, а подынтегральное выражение имеет полюса в точках $\alpha_m = \pm \sqrt{k^2 \varepsilon_0 - \beta_m^2}$.

Мы получили интегральное уравнение

$$\begin{aligned} E(x, y) = E_0(x, y) + \\ + k^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_0) \int_D G(x, y | x', y') E(x', y') dx' dy' \end{aligned} \quad (12)$$

с функцией Грина

$$G(x, y|x', y') = (1/2d) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp[-i\beta_m(x-x') - \gamma_m|y-y'|] / \gamma_m. \quad (13)$$

Интегральное уравнение (12) может быть реше-

$$S_1 = \left(\exp[-ik_x(x-x')] / 2d \right) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \cos[q_m(x-x')] \frac{\exp(-q_m|y-y'|)}{q_m} \right\} = \exp[-ik_x(x-x')] \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left\{ \cos[mg(x-x')] \frac{\exp(-mg|y-y'|)}{mg} \right\}, \quad (14)$$

где $q_m = 2\pi m/d$, $g = 2\pi/d$. Сумма ряда (14) известна:

$$G_1(x, y|x', y') = S_1 = \left\{ \exp[-ik_x(x-x')] / 2d \right\} \left[|y-y'| - (1/g) \ln \left(2 \left\{ \cosh|y-y'| - \cos[g(x-x')] \right\} \right) \right]. \quad (15)$$

Как видно из выражения (15), функция Грина (13) имеет логарифмическую особенность в точке $x = x'$, $y = y'$ и ряд (13) расходится в этой точке. Перепишем ИУ в форме

$$E(x, y) = E_0(x, y) + k^2 \Delta \varepsilon \left[\int_D G(x, y|x', y') E(x', y') dx' dy' - E(x, y) \int_D G_0(x, y|x', y') dx' dy' \right] + k^2 \Delta \varepsilon E(x, y) \int_D G_0(x, y|x', y') dx' dy', \quad (16)$$

где $\Delta \varepsilon = \varepsilon_2 - \varepsilon_0$ и

$$G_0(x, y|x', y') = \lim_{\bar{x} \rightarrow 0, \bar{y} \rightarrow 0} G_1(x, y|x', y') = (1/2d) \ln g^2(\bar{x}^2 + \bar{y}^2), \quad (17)$$

Интеграл от логарифма в (17) может быть найден аналитически для некоторых простых форм поперечного сечения цилиндров D , например, для круга или прямоугольника. Сходимость ряда в функции Грина $G(x, y|x', y')$ улучшится при осуществлении замены ряда (13) в соответствии со схемой

$$(1/2d) \sum_{m=-N}^N g_m \rightarrow (1/2d) \times \sum_{m=-N}^N g_m - (1/2d) \sum_{m=-N}^N s_m + G_1(x, y|x', y'), \quad (18)$$

где g_m и s_m – соответствующие члены рядов (13) и (14).

но и в этой форме, но для выделения особенности функции Грина в явном виде следует провести ряд преобразований. Аналогичный способ применялся авторами в статье [3]. Асимптотическое выражение для суммы (13) при $|m| \rightarrow \infty$ имеет следующий вид:

После выделения особенности интегральное уравнение может быть решено путем замены интегралов квадратурными суммами. В результате получим неоднородную систему алгебраических уравнений, решениями которой являются значения напряженности электрического поля в точках, соответствующих квадратурным узлам. Амплитуда p -й пространственной гармоники отраженного поля может быть найдена по формуле

$$A_p = \left(ik^2 \Delta \varepsilon / 2h_p d \right) \times \int_D E(x, y) \exp \left[i(\beta_p x - |\alpha_p| y) \right] dx dy, \quad (19)$$

где $h_p = \sqrt{k^2 - \beta_p^2}$ при $k^2 - \beta_p^2 > 0$ и $h_p = i\sqrt{\beta_p^2 - k^2}$ при $k^2 - \beta_p^2 < 0$.

Интеграл по области D заменим двойным интегралом

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^{R(\varphi)} \int_0^{2\pi} f'(r, \varphi) r dr d\varphi. \quad (20)$$

Интеграл по r может быть заменен квадратурной формулой Гаусса. Область интегрирования по r зависит от угла и периодически меняется. Интеграл по φ заменим квадратурной формулой по правилу прямоугольников, имеющей наивысшую точность для периодических функций,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R(\varphi)} f'(r, \varphi) r dr d\varphi = (2\pi/N) \sum_{i=1}^K \sum_{j=1}^N \omega_{ij} f(\rho_{ij} \cos \varphi_j, \rho_{ij} \sin \varphi_j) \rho_{ij}, \quad (21)$$

где $2\pi/N$, $\varphi_j = 2\pi j/N$ – весовые коэффициенты и узлы квадратурной суммы, полученные по правилу прямоугольников, $\omega_{ij} = R(\varphi_j) a_i / 2$, $\rho_{ij} = R(\varphi_j) (\xi_i + 1) / 2$, где

a_i и ξ_i – весовые коэффициенты и узлы квадратурной суммы Гаусса для отрезка $[-1, 1]$.

Интеграл от функции G_0 , содержащей логарифмическую особенность, найдем путем перехода от интеграла по области к интегралу по контуру с помощью второй формулы Грина [9]. Это преобразование подробно описано в [5].

Принимая во внимание (20) и (21), можно свести уравнение (16) к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Решая СЛАУ, получим значения напряженности электрического поля в узловых точках (матрица E_{ij}), с помощью которых вычислим значения A_p по формуле (19) или амплитуды пространственных гармоник B_p . Так как значения амплитуды нулевой пространственной гармоники прошедшей или отраженной волны значительно превосходит значения амплитуд всех остальных гармоник, будем считать, что амплитуда нулевой гармоники является коэффициентом пропускания или отражения.

Результаты

Сходимость алгоритма проанализирована для различных форм поперечного сечения диэлектрических брусьев. Точность расчетов зависит от числа азимутальных и радиальных узлов (рис. 2). Как видно из табл. 2, наилучшая сходимость наблюдается для многоугольников с большим числом сторон. Это происходит из-за большего общего числа азимутальных узлов, а также из-за того, что многоугольники с меньшим числом сторон имеют острые углы, область вблизи которых аппроксимируется в соответствии с правилами квадратурного разбиения со значительной погрешностью. Для брусьев с прямоугольным поперечным сечением точность вычислений будет наивысшей при использовании декартовой системы координат, так как в этом случае интеграл от логарифма из (17) может быть найден аналитически.

Сравнение наших результатов для кругового поперечного сечения цилиндров с результатами, найденными в [2], где использовалось мультипольное приближение, представлено в табл. 1. Наблюдает-

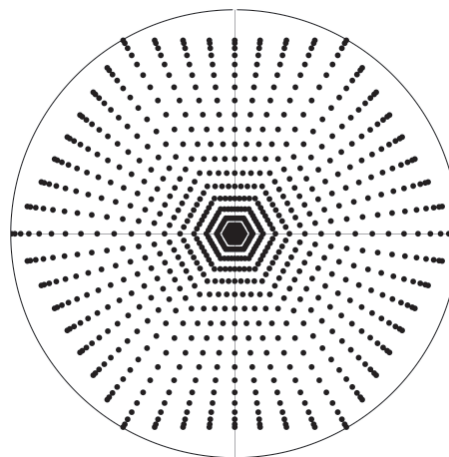


Рис. 2. Распределение узлов в области интегрирования (для шестиугольника). Число азимутальных узлов равно 50, число радиальных узлов равно 20.

ся хорошее согласие результатов. Одним из преимуществ нашего метода является тот факт, что форма поперечного сечения цилиндров фактически не влияет на сложность алгоритма и ее изменение не требует дополнительных вычислительных ресурсов в отличие от метода, использовавшегося в [2].

На рис. 3 и 4 представлены спектральные и угловые зависимости модуля коэффициента пропускания решетки для различных форм поперечного сечения диэлектрических брусьев. Первый номер в скобках означает число азимутальных узлов, второй – число сторон многоугольника. Специфичная форма кривой для каждого из многоугольников дает возможность определить форму поперечного сечения цилиндров, анализируя спектр прошедшей сквозь дифракционную решетку электромагнитной волны.

Заключение

В статье предложен разработанный нами алгоритм решения задачи дифракции электромагнитной волны на решетке из параллельных диэлектрических брусьев. Описанные аналитические преобразования позволяют выделить особенность функции Грина в явной форме, что дает возможность заме-

Таблица 2. Сходимость результатов для различных многоугольников (N – число сторон многоугольника, N_s – число азимутальных узлов на сторону)

$N_s \backslash N$	1	2	3	4	5	6	7	8
3	0,215613	0,471192	0,671539	0,749916	0,783506	0,80056	0,810353	0,816493
4	0,626462	0,312025	0,410166	0,449462	0,468362	0,478812	0,485166	0,489321
8	0,395308	0,343033	0,336351	0,332527	0,330706	0,329786	0,329182	0,32878
16	0,080552	0,191285	0,217652	0,22624	0,230208	0,232278	0,233505	0,234285

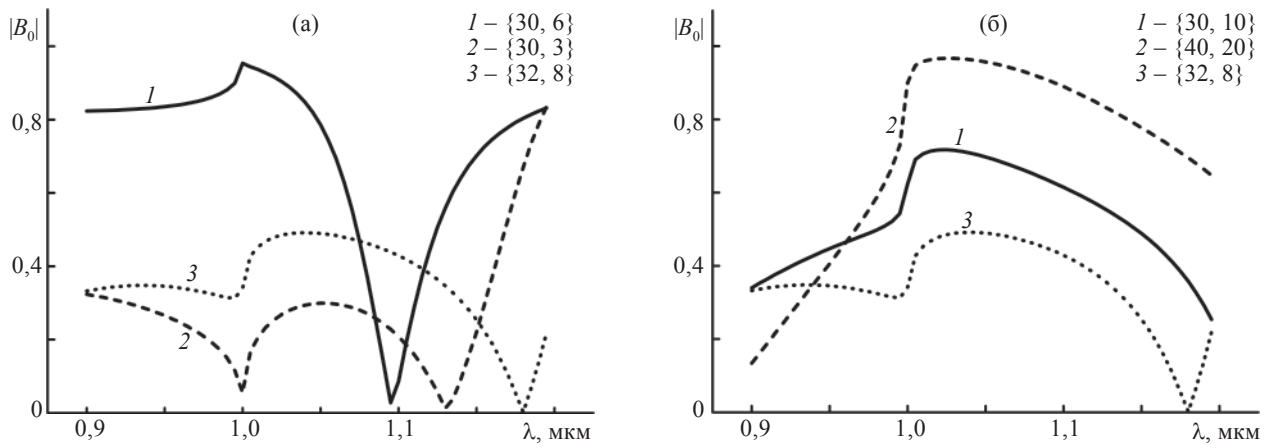


Рис. 3. Спектральные зависимости (при $\epsilon_0 = 1$, $r = 1$). В скобках первый номер означает число азимутальных узлов, второй – число сторон многоугольника. (а) 1 – форма поперечного сечения диэлектрических брусьев – правильный треугольник, 2 – шестиугольник, 3 – восьмиугольник. (б) 1 – форма поперечного сечения диэлектрических брусьев – правильный десятиугольник, 2 – двадцатиугольник, 3 – восьмиугольник.

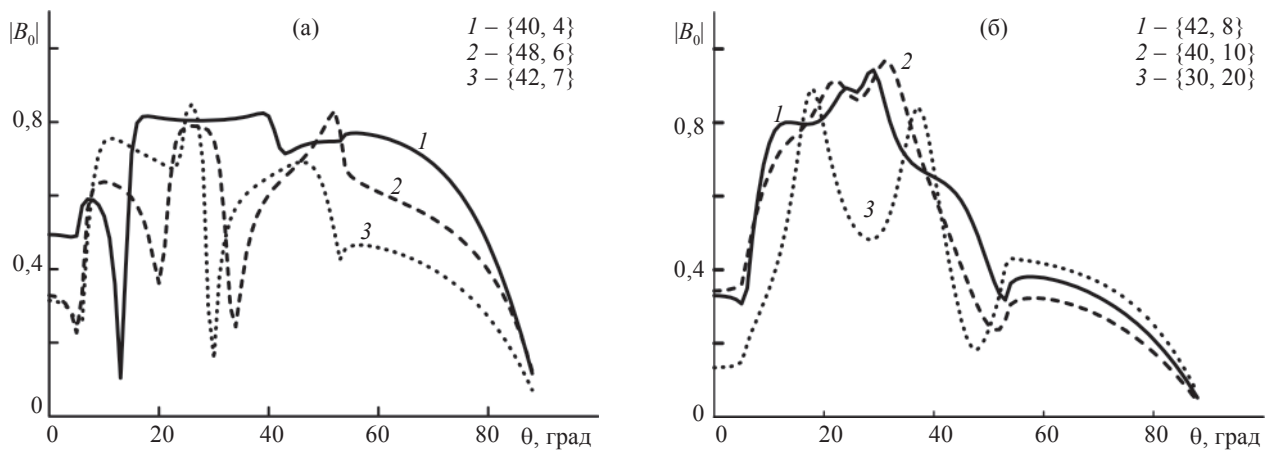


Рис. 4. Угловые зависимости (при $\epsilon_0 = 1$, $2r/d = 0,5$). В скобках первый номер означает число азимутальных узлов, второй – число сторон многоугольника. (а) 1 – форма поперечного сечения диэлектрических брусьев – квадрат, 2 – шестиугольник, 3 – семиугольник. (б) 1 – форма поперечного сечения диэлектрических брусьев – правильный восьмиугольник, 2 – десятиугольник, 3 – двадцатиугольник.

нить интегралы непосредственно на квадратурные суммы. В сущности, представленный метод решения интегральных уравнений является методом моментов, в котором дельта-функция играет роль базиса.

Представленный алгоритм позволяет с высокой точностью построить кривые зависимостей коэффициента пропускания или отражения дифракционной решетки от длины волны или угла падения для любой формы поперечного сечения диэлектрических брусьев. Представленные в статье расчеты при анализе подобных кривых зависимостей, полученных экспериментально, могут использоваться для тестирования наноструктурных одномерных периодических объектов и определения поперечного сечения брусьев.

ЛИТЕРАТУРА

1. Giles C.R. Lightwave Application of Fiber Bragg Gratings // J. Lightwave Technol. 1997. V. 15. № 8. P. 1391–1404.
2. Богданов Ф.Г., Кеванишвили Г.Ш. Дифракция волн на решетках и волноводных неоднородностях. Тбилиси: Самшобло, 1994.
3. Калинин Г.А., Лерер А.М. Электродинамическое моделирование диэлектрических решеток при помощи объемных интегральных уравнений // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 8. С. 1–7.
4. Сухов С.В. Метод интегральных уравнений в оптической ближнепольной микроскопии рассеяния // Опт. и спектр. 2003. Т. 95. № 3. С. 498–503.
5. Калинин Г.А., Кюркчан А.Г., Лерер А.М. Расчет коэффициентов прохождения и отражения собственных

- волн в плоском диэлектрическом волноводе при наличии вблизи него посторонних предметов // Радиотехника и электроника. 2001. Т. 46. № 9. С. 1087–1095.
6. *Davidovich M.V.* Green functions and integral equations for 2D and 3D photonic crystals // Proc. SPIE. 2003. V. 5476. P. 30–37.
17. *Давидович М.В.* Фотонные кристаллы: функции Грина, интегральные уравнения, результаты. Саратов: изд-во. Саратовского университета, 2005. 58 с.
8. *Davidovich M.V.* Integral equations for photonic crystals // Proc. of 6-th IEEE Saratov–Penza Chapter Workshop. Saratov. 2002. P. 86–89.
9. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1973. 175 с.
-