

УДК 621.397.3

Восстановление изображений, смазанных неравномерно

© 2020 г. **В. С. Сизиков, доктор техн. наук; А. Н. Довгань, аспирант;**
А. Д. ЦЕПЕЛЕВА, МАГИСТРАНТ

Университет ИТМО, Санкт-Петербург

E-mail: sizikov2000@mail.ru, aleksandra-dv@yandex.ru, tcepeleva_anastasia@mail.ru

Поступила в редакцию 08.11.2019

DOI:10.17586/1023-5086-2020-87-02-56-63

В работе рассмотрена задача устранения математическим путём неравномерного прямолинейного смаза изображения, например, снимка, полученного неподвижной камерой бегунов на дорожке, бегущих с разными скоростями. Задача описывается набором 1-мерных интегральных уравнений общего типа (не типа свёртки) с 2-мерной функцией рассеяния точки или одним 2-мерным интегральным уравнением с 4-мерной функцией рассеяния точки. Интегральные уравнения решаются методами регуляризации Тихонова и квадратур/кубатур. Показано, что в случае неравномерного смаза использование набора 1-мерных интегральных уравнений является предпочтительнее одного 2-мерного интегрального уравнения. В прямой задаче смазывание изображения дополнено его усечением (truncation) в обход граничных условий, а также размытием ('diffusion') его краёв для подавления эффекта Гиббса в обратной задаче. Рассмотрены случаи кусочно равномерного и непрерывно (линейно) неравномерного смаза. Приведены иллюстративные результаты.

Ключевые слова: смазанное изображение, равномерный и неравномерный смазы, интегральные уравнения, метод регуляризации Тихонова, усечение и размытие краёв, кусочно и непрерывно неравномерные смазы, MatLab.

Коды OCIS: 100.0100.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим одну из актуальных задач обработки искажённых изображений — устранение смаза изображений путём их математической обработки ([1–6] и др.). Смазывание может быть обусловлено сдвигом устройства регистрации изображения или камеры (цифрового фотоаппарата, видеокамеры, следящего устройства) или же движением самого снимаемого объекта (человека, автомобиля, самолёта) за время экспозиции. Задача математического устранения смаза состоит из двух задач: прямой задачи (моделирование смаза) и обратной задачи (устранение смаза).

В настоящее время многие авторы ([5–9] и др.) сосредоточили внимание на методе полной вариации (TV-методе L_1 -регуляризации) [10] и методе двусторонней полной вариации (BTV-методе) [11] восстановления изображений, на сравнении методов регуляризации Тихонова [12] и релаксации Брэгмана [13], а также на методе «слепой» деконволюции [14–16]. Однако в данной работе мы со-

средоточим внимание на нечасто рассматриваемом смазывании изображений, прямолинейном, но неравномерном по скорости движения камеры или объекта за время экспозиции, а также на различных типах интегральных уравнений (ИУ), описывающих такое смазывание.

Во многих публикациях рассмотрен вариант равномерного прямолинейного смаза изображения [1, 4, 6, 17–19], а также вариант произвольного (неравномерного криволинейного) смаза методом «слепой» деконволюции [14, с. 192], [15, 16], но менее подробно рассмотрен вариант неравномерного прямолинейного смаза [2, 20, 21], видимо, потому что он связан с решением интегральных уравнений не типа свёртки, как будет показано дальше.

Цель данной работы — сравнительное рассмотрение двух вариантов прямолинейного смазывания изображения — равномерного и неравномерного. Примеры: смазанное изображение подвижных объектов, движущихся с разными скоростями, полученное неподвижной камерой; неравномерное

сканирование неподвижных объектов подвижной (за время экспозиции) камерой. Заметим, что в работах [2], [20, с. 160–164] рассмотрен случай, когда камера (или объект) за время экспозиции двигалась прямолинейно с некоторой скоростью $v(t)$, где t — время. В данной работе и в работе [21] рассматривается случай смаза $\Delta(x)$, где x — координата. Эти подходы сравниваются далее.

Сначала напомним известный случай равномерного смаза [4, 6, 17–20].

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ РАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СМАЗЫВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Рассмотрим прямую и обратную задачи.

Прямая задача [6, 17]

Прямая задача равномерного прямолинейного смаза описывается интегралом

$$g_y(x) = \frac{1}{\Delta} \int_x^{x+\Delta} w_y(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где $\Delta = \text{const}$ — величина смаза; оси x и ξ направлены вдоль смаза, а ось y — перпендикулярно смазу (играет роль параметра); w_y — заданное несмазанное изображение, а g_y — рассчитанное (смоделированное) смазанное изображение в каждой y -строке. Для расчета g согласно (1) нами разработаны: головная программа Runners.m [21], m-функции smearing.m [6] (при произвольном угле смаза θ) и smear.m [21] (при $\theta = 0$), а в системе MatLab для моделирования g имеются m-функции fspecial.m и imfilter.m [14].

Обратная задача

Обратная (более важная и сложная) задача может решаться в два подхода.

В первом подходе для устранения смаза решается набор 1-мерных интегральных уравнений (ИУ) Фредгольма I рода типа свёртки (при каждом значении y) [6, 17, 18, 19]

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x), \quad -\infty < x < \infty, \quad (2)$$

где

$$h(x) = \begin{cases} 1/\Delta, & -\Delta \leq x \leq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3)$$

ИУ (2) получено из соотношения (1), оси x и ξ направлены вдоль смаза, h — математически ядро ИУ, а физико-технически — функция рассеяния точки (ФРТ, PSF) [3, 4, 6, 15, 16, 22]. Функция h , как правило, является разностной или пространственно-инвариантной, что означает, что смаз рав-

номерный и величина смаза Δ одинакова во всех точках изображения ($\Delta = \text{const}$).

Задача решения ИУ (2) некорректна [12, 23]. Используем устойчивый метод регуляризации Тихонова (РТ) с преобразованием Фурье (ПФ) [4, 6, 24]:

$$w_{\alpha y}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\alpha y}(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (4)$$

где

$$W_{\alpha y}(\omega) = \frac{H(-\omega) G_y(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \alpha \omega^{2p}} \quad (5)$$

— регуляризованный Фурье-спектр или ПФ решения; $H(\omega) = F(h(x))$ и $G_y(\omega) = F(g_y(x))$ — Фурье-спектры функций $h(x)$ и $g_y(x)$, где F — символ ПФ; $\alpha > 0$ — параметр регуляризации; $p \geq 0$ — порядок регуляризации (обычно $p = 1$ или 2). Для выбора параметра регуляризации α разработан ряд способов: принцип невязки, способ обучающих примеров-изображений, способ подбора и др. [6, 12, 20, 24]. Для расчёта восстановленного изображения по формулам (4)–(5) нами разработана m-функция desmearingf.m [6].

Во втором подходе для устранения смаза (а также дефокусирования) используется 2-мерное ИУ Фредгольма I рода типа свёртки (ср. (2)) [6, 17–21].

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y), \quad (6)$$

$$-\infty < x, y < \infty,$$

причем оси x и ξ направлены горизонтально, а y и η — вертикально вниз. ФРТ h отображается на плоскости (x, y) в виде узкой полоски (рис. 1) [6, с. 112].

В этом подходе расчёт прямой задачи ведётся по m-функциям fspecial.m и imfilter.m [14]. А решение 2-мерного ИУ (6) (обратная задача) методом РТ и 2-мерного ПФ равно $w_{\alpha}(x, y) = F^{-1}(W_{\alpha}(\omega_1, \omega_2))$,

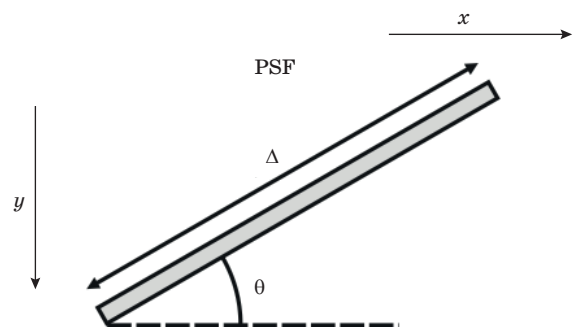


Рис. 1. Функция рассеяния точки (PSF) $h(x, y)$ в виде узкой полоски длиной Δ под углом θ .

где F^{-1} — обратное преобразование Фурье (ОПФ), или

$$w_{\alpha}(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_{\alpha}(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 x + \omega_2 y)} d\omega_1 d\omega_2. \quad (7)$$

В (7) $W_{\alpha}(\omega_1, \omega_2)$ — регуляризованный спектр (двумерное ПФ) решения, равный (ср. (5))

$$W_{\alpha}(\omega_1, \omega_2) = \frac{H^*(\omega_1, \omega_2) G(\omega_1, \omega_2)}{|H(\omega_1, \omega_2)|^2 + \alpha(\omega_1^2 + \omega_2^2)^p}, \quad (8)$$

где $H(\omega_1, \omega_2) = F(h(x, y))$, $G(\omega_1, \omega_2) = F(g(x, y))$. MatLab содержит m-функцию `deconvreg.m` [14] для решения ИУ (6) методом РТ и ПФ согласно (7)–(8).

Мы привели известные формулы (1)–(8) для того, чтобы сравнить различные нижеследующие подходы.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ НЕРАВНОМЕРНОГО ПРЯМОЛИНЕЙНОГО СМАЗЫВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Учитывая соотношения (1)–(8), рассмотрим неравномерный прямолинейный смаз изображения вдоль траектории смаза. Рассмотрим два подхода.

Первый (временной) подход [2, 20]

В этом подходе полагается известной скорость перемещения объекта (или камеры) $v(t)$ в функции времени $t \in [0, \tau]$, где τ — время экспозиции. Направляя оси x и ξ вдоль смаза, получим выражение для смазанной интенсивности в прямой задаче в наших обозначениях (ср. (1)).

$$g_y(x) = k \int_0^{\tau} w_y(x + \delta(t)) dt, \quad (9)$$

где $k = 1/\tau$, $\delta(t) = \int_0^t v(t') dt'$ — величина смаза в функции t .

Однако запись (9) несколько неудобна тем, что g — функция пространственной координаты x , а w — функция x и времени t . Перейдём к чисто пространственным координатам. Сделаем замену переменной:

$$t|_0^{\tau} \rightarrow \xi|_x^{x+\delta(\tau)}, \quad dt = \frac{d\xi}{v(\xi)} d\xi,$$

где $t = t(\xi)$ — решение уравнения $x + \delta(t) = \xi$, $\delta(t(\xi - x)) = \xi - x$ или $\delta(t(\xi)) = \xi$. Далее, $v(t) = d\delta(t)/dt$, откуда

$$dt(\xi) = \frac{d\delta(t(\xi - x))}{v(t(\xi - x))} = \frac{d\xi}{v(t(\xi - x))}.$$

В результате (9) запишется в виде

$$g_y(x) = k \int_x^{x+\delta(\tau)} w_y(\xi) \frac{d\xi}{v(t(\xi - x))}$$

или, вводя $K(\xi) = 1/v(t(\xi))$, получим

$$g_y(x) = k \int_x^{x+\delta(\tau)} K(\xi - x) w_y(\xi) d\xi. \quad (10)$$

Получили два выражения (9) и (10) для вычисления $g_y(x)$ в прямой задаче. Эти выражения являются также интегральными уравнениями для нахождения $w_y(\xi)$ в обратной задаче. Однако данный (временной) подход является довольно сложным, так как он требует решения нелинейного уравнения $\delta(t(\xi)) = \xi$ относительно t . Предлагаем второй, более простой подход.

Второй (пространственный) подход [21]

Пусть по смазанному снимку определена некоторым образом, например, методом «слепой» деконволюции [15] или спектральным способом [19] зависимость $\Delta = \Delta(x)$ — смаза Δ от координаты x , направленной вдоль смаза.

Прямая задача

В этом случае ФРТ h не является разностной или пространственно-инвариантной и прямая задача записывается в виде (ср. (1)):

$$g_y(x) = \frac{1}{\Delta(x)} \int_x^{x+\Delta(x)} w_y(\xi) d\xi. \quad (11)$$

Для расчёта g согласно (11) нами разработана m-функция `smear_n.m` [21].

Обратная задача

Обратная задача в рамках второго подхода запишется в виде набора одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода общего типа (не типа свёртки) при каждом значении y [6, с. 125]:

$$Aw_y \equiv \int_a^b h(x, \xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x), \quad c \leq x \leq d, \quad (12)$$

где A — интегральный оператор; $[a, b]$ и $[c, d]$ — пределы для ξ и x . ФРТ h запишется в виде (ср. (3)):

$$h(x, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta(x), & x \leq \xi \leq x + \Delta(x), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Для решения ИУ (12) нельзя применить ПФ, так как ИУ (12) не типа свёртки, но можно применить метод квадратур, приводящий ИУ (12) к системе

линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) при каждом y [6, с. 126]:

$$Aw_y = g_y, \quad (14)$$

где A — матрица, связанная с h (одинаковая для всех y -строк), w_y — искомый вектор, g_y — правая часть СЛАУ. Устойчивое решение СЛАУ (14) даёт метод регуляризации Тихонова [6, с. 126]:

$$(\alpha I + A^T A)w_{y\alpha} = A^T g_y, \quad (15)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, I — единичная матрица, A^T — транспонированная матрица, а $w_{y\alpha}$ — регуляризованное решение в y -строке, равное

$$w_{y\alpha} = (\alpha I + A^T A)^{-1} A^T g_y. \quad (16)$$

Для компьютерной реализации формул (12)–(16) нами разработана m-функция `desmearq_n.m` [21].

Заметим, что метод квадратур с регуляризацией Тихонова (14) может быть использован и для решения ИУ типа свёртки (2) с ФРТ (3). Для этого разработана m-функция `desmearingq.m` [6].

Обратная задача в рамках второго подхода может быть записана также в виде 2-мерного ИУ Фредгольма I рода общего типа [24, 25] (ср. (6), (12)):

$$Aw \equiv \int_a^b \int_c^d h(x, \xi, y, \eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y), \quad (17)$$

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Уравнение (17) может быть решено методом квадратур (точнее, кубатур) (ср. [24, с. 167]). Согласно этому методу, каждый из интегралов в (17) заменяется конечной суммой на дискретных сетках узлов по x , ξ , y , η и получается СЛАУ с 4-мерной матрицей A и 2-мерной правой частью g . Чтобы решить такую СЛАУ, нужно 4-мерную матрицу A преобразовать в 2-мерную, 2-мерную правую часть g преобразовать в 1-мерную, а получающееся 1-мерное решение w преобразовать в 2-мерное. Хотя (успешная) попытка решения 2-мерного ИУ методом кубатур имела место [24, с. 167–169], тем не менее, это громоздкий метод и его применение для восстановления неравномерно смазанного изображения является проблематичным.

Можно для решения ИУ (17) применить также методы итеративной регуляризации Ландвебера, Фридмана, Бакушинского и др. [20, 23, 24], более простые, чем метод кубатур, однако они требуют удачного выбора начального приближения w , знания параметра метода ν , чисел итераций и т.д.

В результате следует признать, что наиболее эффективной в случае неравномерного смаза является методика (12)–(16), основанная на построчной

обработке изображения путём решения при каждом y 1-мерного ИУ (12) и СЛАУ (14) с 2-мерной матрицей.

ИЛЛЮСТРАТИВНЫЙ ПРИМЕР

Был решён следующий численный пример, заимствованный из Интернета. На рис. 2а представлено полутонное (серое, gray) исходное изображение семи бегунов на дорожке — файл `runners.jpg` размером 123×400 пкс. Изображение содержит, помимо бегунов, значительно неоднородный фон. Чтобы не отвлекаться на проблемы, связанные с неоднородностью фона, мы выполнили выравнивание фона: значения интенсивностей больше 40 заменили на 170 (путём подбора, см. рис. 2б).

Далее точным (неискажённым) изображением будем считать изображение на рис. 2б и сравнивать обработанные изображения с изображением на рис. 2б. Будем выполнять такие сравнения путём вычисления относительной погрешности в виде среднеквадратического отклонения изображения \tilde{w} от точного изображения \bar{w} [18, 19].

$$\sigma_{\text{rel}} = \frac{\|\tilde{w} - \bar{w}\|_{L_2}}{\|\bar{w}\|_{L_2}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N (\tilde{w}_{ji} - \bar{w}_{ji})^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^N \bar{w}_{ji}^2}}, \quad (18)$$

где M — высота (число строк), а N — ширина (число столбцов) изображения. Такое выражение для погрешности изображения можно использовать лишь в случае обработки модельного изображения, например, при проверке методики, когда \bar{w}

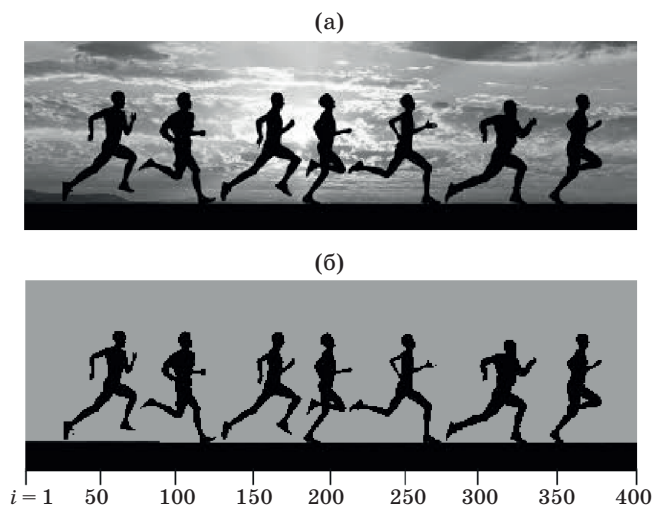


Рис. 2. Исходное изображение `runners.jpg` 123×400 . (а) — изображение с неоднородным фоном, (б) — изображение с выравненным фоном (i — номер отсчёта).

известно (задано). Можно вычислять погрешность по другим формулам, например [18, 19],

$$\text{PSNR} = 10 \lg \left(\bar{w}_{\max} MN / \|\tilde{w} - \bar{w}\|_{L_2}^2 \right),$$

но мы отдаём предпочтение более удобной и наглядной формуле (18).

ПРЯМАЯ И ОБРАТНАЯ ЗАДАЧИ РАВНОМЕРНОГО СМАЗА С УСЕЧЕНИЕМ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Прямая задача

На рис. 3а приведён результат решения прямой задачи — равномерное горизонтальное смазывание изображения согласно (1) с помощью *m*-функции *smear.m* с усечением (truncation) изображения. Такое (равномерное) смазывание может произойти в случае равномерного сдвига фотоаппарата при условии, что за короткое время экспозиции бегуны практически не сместились.

Величина смаза $\Delta = 20$ пкс (значительное смазывание). Усечение изображения [6, с. 116] использовано для того, чтобы не использовать так называемые «граничные условия» (boundary conditions) [6, с. 113], [14, с. 108], [26] с опциями 'circular' (periodic) и др. В работе [7] отмечена эффективность варианта 'circular' для подавления артефактов на изображении, в работе [14, с. 185] рекомендуется использовать *m*-функцию *edgetaper.m* для подавления ложных флуктуаций на изображении, а в работе [26] предложены приёмы 'truncation' (усечение изображения) и 'diffusion' (размытие его краёв). Их сравнение см. дальше.

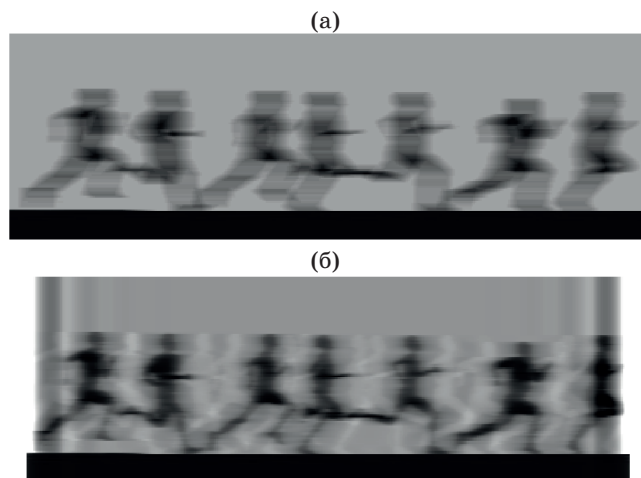


Рис. 3. Прямая и обратная задачи равномерного смазывания изображения с усечением ('truncation'). (а) — смазанное изображение 123×380 ($\Delta = 20$ пкс), (б) — восстановленное изображение 123×360 методом РТ ($\alpha = 10^{-1}$), $\sigma_{\text{rel}} = 0,463$.

Обратная задача

На рис. 3б — результат решения обратной задачи — восстановление изображения методами РТ и квадратур по разработанной *m*-функции *desmearq.m* [21] с параметром регуляризации $\alpha = 10^{-1}$ (выбранным путём подбора).

Рис. 3б показывает неудовлетворительное восстановление со значительным эффектом Гиббса (искажениями типа «звоны»). Это вызвано тем, что в случае усечения интенсивность на краю изображения имеет разрыв непрерывности типа ступенчатой функции Хэвисайда (рис. 3а), а преобразование Фурье от неё есть функция *sinc* (с затухающими флуктуациями) [6, с. 117].

Прямая и обратная задачи равномерного смаза с размытием краёв изображения

Более эффективным является приём размытия краёв изображения (наша опция 'diffusion') [6, с. 117], [26]. На рис. 4 — результаты с использованием приёма размытия в прямой задаче, предназначенного для подавления эффекта Гиббса в обратной задаче за счёт гладкого (искусственного) спада интенсивности к нулю на краях изображения. Подобрости — в [6, 26].

Видим, что несмотря на значительный смаз (см. рис. 3а и 4а), изображение хорошо восстановилось (рис. 4б), причём без эффекта Гиббса, благодаря размытию краёв изображения и $\Delta = \text{const}$ (ср. с рис. 3б).

Что касается *m*-функции *edgetaper.m*, то, как показало моделирование [6, 24], эта функция недостаточно размывает края изображения и поэтому в меньшей степени подавляет эффект Гиббса, чем наш приём «размытие».

Приём «размытие» напоминает сглаживание краёв передаточной функции $H(\omega)$, окно Кайзера,

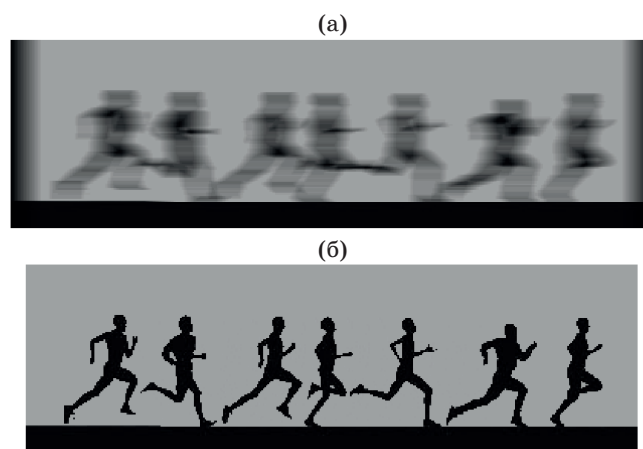


Рис. 4. Прямая и обратная задачи равномерного смазывания изображения с размытием краёв ('diffusion'). (а) — смазанное изображение 123×420 ($\Delta = 20$ пкс), (б) — восстановленное изображение 123×400 методом РТ ($\alpha = 10^{-6}$), $\sigma_{\text{rel}} = 0,0011$.

Таблица значений смазов бегунов

Номер бегуна	1	2	3	4	5	6	7
Диапазон значений i	$1 \leq i \leq 75$	$75 < i \leq 127$	$127 < i \leq 182$	$182 < i \leq 213$	$213 < i \leq 274$	$274 < i \leq 339$	$339 < i \leq 400$
Значение $\Delta(i)$, пкс	5	8	11	14	17	20	23

фильтры рекурсивный, гауссов, Гильберта и Баттерворта [6, с. 118]. Однако в перечисленных фильтрах, особенно в фильтрах Баттерворта и гауссовом, делается повышение гладкости краёв передаточной функции $H(\omega)$ или $H(\omega_1, \omega_2)$ в частотной области, а в приёме «размытие» осуществляется размытие краёв непосредственно самого изображения $g(x, y)$, что ведёт к большему размытию краёв изображения в прямой задаче и, как следствие, к большему подавлению эффекта Гиббса в обратной задаче.

Прямая и обратная задачи неравномерного смаза изображения

Следующий шаг — неравномерное смазывание изображения. Полагаем, что бегуны бегут с разными скоростями v , а значит, у них разные смазы $\Delta = vt$ за время экспозиции t . На основе рис. 2б мы определили границы между бегунами и значения смазов Δ бегунов (см. таблицу).

В результате смаз $\Delta(x)$ или $\Delta(i)$ представлен кусочно-постоянной функцией. Каждый бегун в пределах его диапазона имеет своё постоянное значение смаза. На рис. 5а представлено изображение, смазанное кусочно равномерно, а именно, смазывание нарастает от левого бегуна, у которого смаз равен 5 пкс, к правому бегуну, у которого смаз равен 23 пкс, т.е. смазывание существенно неравномерное. Данное смазывание смоделировано согласно (11) с помощью разработанной нами m -функции smear_n.m [21] с усечением ('truncation').

На рис. 5б — результат восстановления изображения (обратная задача) методом квадратур с регуляризацией Тихонова согласно (12)–(16) с помощью m -функции desmearq_n.m [21]. Параметр регуляризации $\alpha = 10^{-1}$ (выбран путём подбора). Рис. 5б показывает, что изображения бегунов восстановились с нарастающей вправо погрешностью и с неровным фоном.

Выполнено выравнивание фона: значения интенсивностей на рис. 5б, большие 100, заменены на 170 (числа 100 и 170 выбраны путём подбора). На рис. 5в — результат восстановления изображения после выравнивания фона. Видим, что изображения бегунов восстановились не вполне удовлетворительно (ср. с рис. 3б), и это обусловлено усечением изображения, не подавляющим эффект Гиббса.

Чтобы улучшить результат, мы выполнили обработку с размытием краёв изображения ('diffusion'). На рис. 6а — неравномерно смазан-

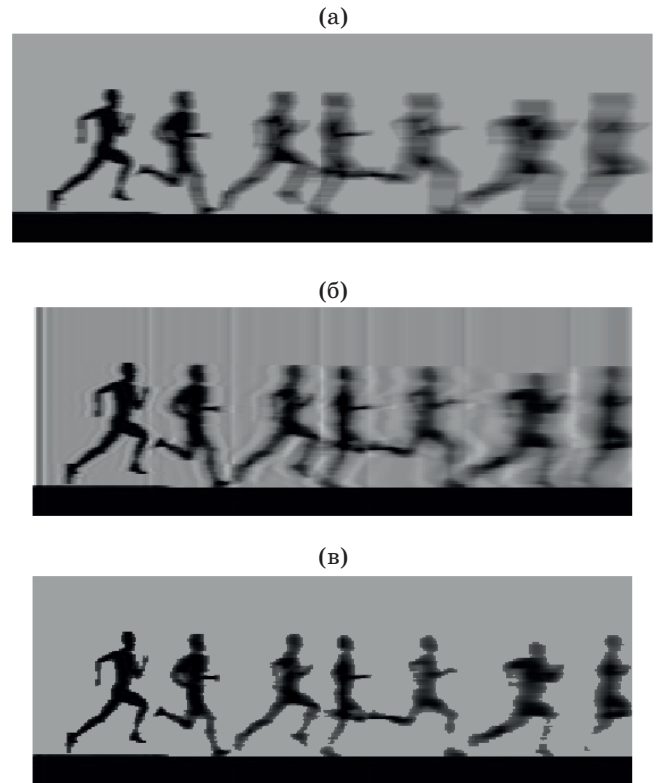


Рис. 5. Прямая и обратная задачи неравномерного смазывания изображения с усечением. (а) — смазанное изображение 123×377 , (б) — восстановленное изображение 123×353 методом РТ ($\alpha = 10^{-1}$), (в) — восстановленное изображение 123×353 с выравненным фоном, $\sigma_{\text{rel}} = 0,421$.

ное изображение (согласно таблице) с размытием краёв. На рис. 6б — изображение, восстановленное методом РТ. Фигуры бегунов восстановились, но с неровным фоном. На рис. 6в — результат после выравнивания фона.

Видим, что изображения бегунов восстановились лучше, чем на рис. 5в (погрешность σ_{rel} уменьшилась).

Помимо кусочно постоянного смаза изображения рассмотрим также линейно нарастающее непрерывное смазывание изображения. Пусть неравномерный смаз изменяется непрерывно по линейному закону.

$$\Delta(i) = \beta + \gamma(i - 1), \quad i = \overline{1, n}, \quad (19)$$

где i — номер отсчёта на рис. 2б, $n = 400$, β и γ — некоторые коэффициенты.

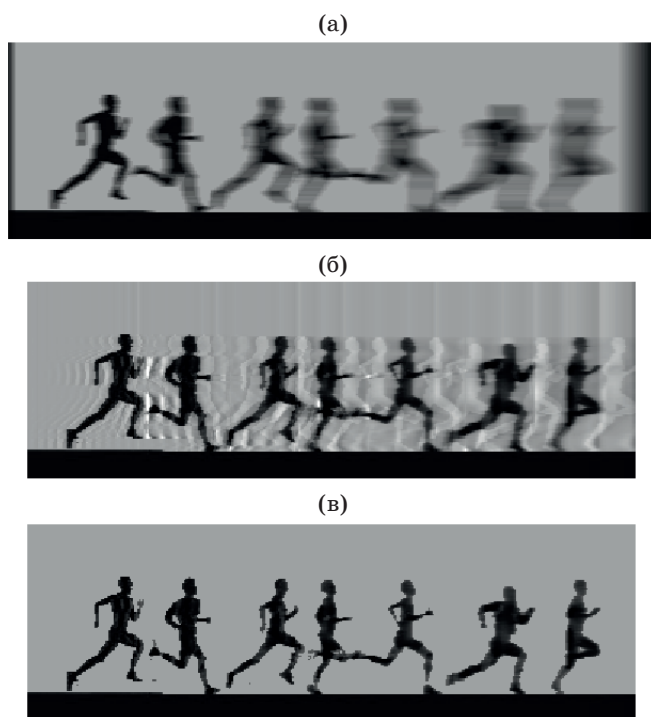


Рис. 6. Прямая и обратная задачи кусочно равномерно смазывания изображения с размытием краёв. (а) — смазанное изображение 123×405 , (б) — восстановленное изображение 123×381 методом РТ ($\alpha = 10^{-1}$), (в) — восстановленное изображение 123×381 после выравнивания фона, $\sigma_{\text{rel}} = 0,359$.

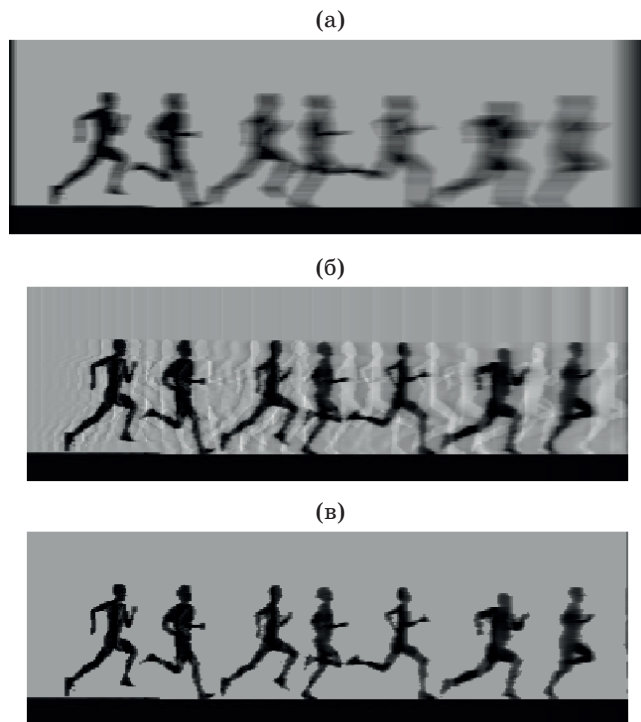


Рис. 7. Прямая и обратная задачи неравномерного смазывания изображения по линейному закону (19) с размытием краёв. (а) — смазанное изображение 123×405 , (б) — восстановленное изображение 123×380 методом РТ ($\alpha = 10^{-1}$), (в) — восстановленное изображение 123×380 с выровненным фоном, $\sigma_{\text{rel}} = 0,346$.

Выберем β и γ так, чтобы $\Delta(1) = 5$ и $\Delta(n) = 25$, т.е. смаз нарастал линейно от 5 до 25 пкс. Имеем: $\beta = \Delta(1) = 5$, $\gamma = (\Delta(n) - \Delta(1))/(n - 1) = 0,050125313$.

Смаз типа (19) может иметь место в случае, когда узкоформатная камера за время экспозиции τ совершила непрерывный сдвиг (ср. [15, Fig. 4, right]) — сканирование слева направо с нарастающей скоростью (а, значит, с нарастающим смазом Δ), а объекты за это же (короткое) время τ практически не сдвинулись.

Ещё пример: неподвижная камера снимает взлёт ракеты и на снимке фиксируется струя газа, исходящего из сопла ракеты с неравномерным смазом.

На рис. 7а — изображение, смазанное по закону (19) с размытием краёв. На рис. 7б — восстановленное изображение по разработанной m -функции `desmearq1_n.m`. На рис. 7в — изображение после выравнивания фона. Видим, что изображение в случае линейного смаза (19) (рис. 7в) восстановилось точнее, чем в случае кусочно равномерного смаза (рис. 6в).

Однако на рис. 5б, 6б и 7б проявилась неровность фона, которую можно назвать «внутренним эффектом Гиббса». Он обусловлен тем, что изображения бегунов и фон имеют существенно разные интенсивности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложена методика восстановления смазанных изображений в случае, когда смазывание является прямолинейным неравномерным, а именно, кусочно равномерным или непрерывно неравномерным (пример: бегуны на дорожке). В этом случае нужно решать или набор 1-мерных интегральных уравнений (первый подход), или одно 2-мерное ИУ (второй подход). В обоих подходах уравнения не являются ИУ типа свёртки, поэтому они решаются методом квадратур/кубатур с регуляризацией Тихонова. Показано, что первый подход является более предпочтительным, чем второй подход. Численные примеры подтвердили это. Показано также, что для повышения качества восстановления изображения следует использовать размытие краёв изображения (для подавления краевого эффекта Гиббса) вместо так называемых граничных условий (boundary conditions).

Весьма эффективной явилась также операция «выравнивание фона». Это — способ подавления внутреннего эффекта Гиббса.

В дальнейшем планируется разработка способа определения зависимости смаза $\Delta(x)$, например, на основе спектрального способа [19] или/и «слепой» деконволюции [15], развитие способа подавления внутреннего эффекта Гиббса, рассмотрение

регуляризации с переменным параметром регуляризации $\alpha = \alpha(x)$ для учёта неравномерности смаза и рассмотрение варианта неравномерного криволинейного смаза, как в методе «слепой» деконволюции.

Методика может быть использована на практике для восстановления групповых изображе-

ний нескольких объектов (людей, самолётов, автомобилей), движущихся с разными скоростями и поэтому за время экспозиции неподвижной камерой получающих разные смазы Δ на изображениях.

Работа поддержана грантом МФКТУ ИТМО (проекты 617026 и 619296).

ЛИТЕРАТУРА

1. Арсфьева М.В., Сысоев А.Ф. Быстрые регуляризирующие алгоритмы цифрового восстановления изображений // Вычислительные методы и программирование. 1983. Вып. 39. С. 40–55.
2. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений // Некорректные задачи естествознания / Под ред. Тихонова А.Н., Гончарского А.В. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 185–195.
3. Грузман И.С., Киричук В.С., Косых В.П., Перетягин Г.И., Спектор А.А. Цифровая обработка изображений в информационных системах. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 352 с.
4. Гонсалес Р., Вудс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006. 1072 с.
5. Huang J., Donatelli M., Chan R. Nonstationary iterated thresholding algorithms for image deblurring // Inverse Problems Imaging. 2013. V. 7. № 3. P. 717–736.
6. Сизиков В.С. Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab. СПб.: Лань, 2017. 412 с.
7. Matakos A., Ramani S., Fessler J.A. Accelerated edge-preserving image restoration without boundary artifacts // IEEE Trans. Image Process. 2013. V. 22. № 5. P. 2019–2029.
8. Xu Y., Huang T.-Z., Liu J., Lv X.-G. Split Bregman iteration algorithm for image deblurring using fourth-order total bounded variation regularization model // Hindawi J. Appl. Math. 2013. Article ID 238561. 11 p.
9. Chang H., Tai X.-C., Wang L.-L., Yang D. Convergence rate of overlapping domain decomposition methods for the Rudin-Osher-Fatemi model based on a dual formulation // SIAM J. Imaging Sci. 2015. V. 8. № 1. P. 564–591.
10. Rudin L., Osher S., Fatemi E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms // Phys. D. 1992. V. 60. P. 259–268.
11. Farsiu S., Robinson M.D., Elad M., Milanfar P. Fast and robust multiframe super resolution // IEEE Trans. Image Process. 2004. V. 13. № 10. P. 1327–1344.
12. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. 288 с.
13. Брегман Л.М. Релаксационный метод нахождения общей точки выпуклых множеств и его применение для решения задач выпуклого программирования // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. 1967. Т. 7. № 3. С. 620–631.
14. Гонсалес Р., Вудс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Техносфера, 2006. 616 с.
15. Fergus R., Singh B., Hertzmann A. et al. Removing camera shake from a single photograph // ACM Trans. Graphics (TOG). 2006. V. 25. № 3. P. 787–794.
16. Южиков В.С. Blind deconvolution — автоматическое восстановление смазанных изображений. <https://habr.com/ru/post/175717/>
17. Сизиков В.С., Белов И.А. Реконструкция смазанных и дефокусированных изображений методом регуляризации // Оптический журнал. 2000. Т. 67. № 4. С. 60–63.
18. Сизиков В.С., Экземпляров Р.А. Последовательность операций при фильтрации шумов на искаженных изображениях // Оптический журнал. 2013. Т. 80. № 1. С. 29–48.
19. Сизиков В.С., Степанов А.В., Меженев А.В., Бурлов Д.И., Экземпляров Р.А. Определение параметров искажений изображений спектральным способом в задаче обработки снимков поверхности Земли, полученных со спутников и самолётов // Оптический журнал. 2018. Т. 85. № 4. С. 19–27.
20. Бакушинский А.В., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 199 с.
21. Sizikov V., Dogan A. Reconstruction of images smeared uniformly and non-uniformly // CEUR Workshop Proceedings. 2019. V. 2344, paper2.pdf. 11 p.
22. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989. 336 с.
23. Engl H., Hanke M., Neubauer A. Regularization of inverse problems. Dordrecht: Kluwer, 1996. 328 p.
24. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наук. думка, 1986. 544 с.
25. Горшков А.В. Улучшение разрешения изображений при обработке данных физического эксперимента и нахождения неизвестной аппаратной функции по программам пакета REIMAGE // Приборы и техника эксперимента. 1995. № 2. С. 68–78.
26. Сизиков В.С. Прием «усечение–размытие–поворот» для восстановления искаженных изображений // Оптический журнал. 2011. Т. 78. № 5. С. 18–26.