Оптический журнал

Физическая оптика

УДК 535.233.2

DOI:10.17586/1023-5086-2018-85-06-03-05

Обобщенные закон смещения Вина и закон Стефана–Больцмана для теплового излучения, имеющего ненулевой химический потенциал

© 2018 г. **А. Е. Дубинов, доктор физ.-мат. наук; И. Н. Китаев**

Российский Федеральный Ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики (РФЯЦ–ВНИИЭФ), г. Саров Нижегородской обл.

Национальный исследовательский ядерный университет — Московский инженерно-физический институт (МИФИ), Москва

Саровский физико-технический институт (СарФТИ), г. Саров Нижегородской обл.

E-mail: dubinov-ae@yandex.ru

Поступила в редакцию 21.01.2018

Получены точные математические выражения обобщённых закона смещения Вина и закона Стефана–Больцмана для теплового излучения, имеющего ненулевой химический потенциал.

Ключевые слова: *закон Стефана–Больцмана, закон Вина, абсолютно чёрное тело.*

Коды OCIS: *000.6800.*

1. ВВЕДЕНИЕ

Закон смещения Вина устанавливает зависимость длины волны $\lambda_{\max}$, на которую приходится спектральный максимум излучения абсолютно чёрного тела, от температуры этого тела T [1]. Эта зависимость имеет простой вид

$$\lambda_{\max} T = b, \tag{1}$$

где b — постоянная Вина, имеющая значение b = 0,002898 м K. Постоянная b имеет точную формулу [2, 3], выраженную через W-функцию Ламберта [4, 5] и фундаментальные константы: c — скорость света, $\hbar$ и k — постоянные Планка и Больцмана

$$b = \frac{2\pi c\hbar}{k}\frac{1}{5 + W_0\left[-5\exp(-5)\right]}. \tag{2}$$

Закон Стефана–Больцмана устанавливает связь между интегральной поверхностной плотностью P излучения абсолютно чёрного тела и его температурой T [1, 6, 7]. Он имеет следующий формульный вид

$$P = \sigma T^4, \tag{3}$$

где постоянная $\sigma = \Gamma(4)k^4/(\pi^2 c^3 \nabla^3) = \pi^2 k^4/(15c^3\nabla^3) =$ $= 8{,}829\times10^{-16}$ Дж м$^{-3}$ K^{-4}.

Оба закона излучения абсолютно чёрного тела выводятся с помощью теории теплового излучения Планка [1, 6, 7] для фотонов в предположении, что химический потенциал фотонного газа $\mu_\gamma = 0$. Такое предположение справедливо, например, для накалённых твёрдых тел.

Однако, как указывается в [8–10], существует множество примеров, в которых фотонный газ может иметь ненулевой химический потенциал μ_γ. Например, равенство $\mu_\gamma = 0$ может не соблюдаться в астрофизической квантово-вырожденной электрон-ионной плазме, в которой происходит процесс излучательной рекомбинации, а также в полупроводниковой электрон-дырочной плазме при рекомбинации электронов и дырок.

Действительно, если, например, в полупроводниковой плазме существенны процессы типа $e + h \leftrightarrow \gamma$, то должно быть

$$\mu_e + \mu_h = \mu_\gamma. \tag{4}$$

При этом, сумма $\mu_e + \mu_h$ равна разнице энергий Ферми электронов проводимости и дырок из валентной зоны [8], которая часто бывает ненулевой. Отметим, что для бозонов, к которым относятся и фотоны, химический потенциал может быть только $\mu_\gamma \le 0$ [1].

Таким образом, представляется необходимым обобщить законы излучения абсолютно чёрного тела и, в частности, закон смещения Вина и закон Стефана–Больцмана для теплового излучения при наличии у этого излучения ненулевого значения химического потенциала μ_γ. Это и стало целью данной работы.

2. ОБОЩЕННЫЙ ЗАКОН СМЕЩЕНИЯ ВИНА

Математически вывод закона смещения Вина представляет собой нахождение максимума у спектрального распределения.

Будем исходить из следующего спектрального распределения для фотонов, отличающегося от планковского распределения наличием в формуле химического потенциала μ_γ [8]

$$f_P(\omega)=\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3}\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega-\mu_\gamma}{kT}\right)-1\right]^{-1}, \tag{5}$$

в котором ω — частота, $f_P(\omega)$ — плотность энергии, приходящейся на интервал $d\omega$. Распределение (5) формально совпадает с распределением частиц Бозе–Эйнштейна. В этой связи попутно отметим, что оба распределения, и Планка, и Бозе–Эйнштейна (5), являются формальными решениями стационарного уравнения Компанейца [11, 12], описывающего перенос фотонов через электронную плазму. Это лишний раз подтверждает необходимость рассмотрения процессов в излучении, имеющем ненулевое значение μ_γ.

Специально подчеркнём, что распределение (5) справедливо, когда фотонный газ является термодинамически равновесным. Помимо этого, важным условием является выполнение принципа детального равновесия в процессах $e+h \leftrightarrow \gamma$. Физические ситуации, в которых фотонный газ имеет ненулевой химический потенциал и в то же время находится в термодинамическом и детальном равновесиях, возможны. Например, в полупроводниковых светоизлучающих диодах (LEDs) и полупроводниковых солнечных элементах фотонный газ, генерируемый при радиационной рекомбинации электронов и дырок, может находится с ними в указанных равновесиях. Это показано в [13–16] и многих других источниках.

Приведем для справки характерные значения химического потенциала, которые могут реализовываться в полупроводниках LEDs: $\mu_\gamma = -1{,}33$ эВ при температуре $T = 78$ К [9] или $\mu_\gamma = -1{,}0$ эВ при температуре $T = 300$ К [14].

Выразим распределение (5) через длину волны $\lambda = c/\omega$. Тогда

$$f_P(\lambda)=\frac{16\pi^2\hbar c}{\lambda^5}\left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}-\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)-1\right]^{-1}. \tag{6}$$

Найдём положение максимума функции (6). Для этого продифференцируем (6) по λ и приравняем результат нулю

$$\frac{df_P(\lambda)}{d\lambda}=\frac{16\pi^2c\hbar}{\lambda}\left\{5\left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}-\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)-1\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}-\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)\right\}\times$$
$$\times\left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}-\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)-1\right]^{-2}=0. \tag{7}$$

Решение этого трансцендентного уравнения легко находится с помощью W-функции Ламберта [4, 5]

$$\lambda_{\max}=\frac{2\pi\hbar c}{kT}\left\{5+W_0\left[-5\exp\left(-5+\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)\right]\right\}^{-1}, \tag{8}$$

из которого следует обобщённый закон смещения Вина (1) с b, являющейся функцией μ_γ

$$b(\mu_\gamma)=\frac{2\pi\hbar c}{k}\left\{5+W_0\left[-5\exp\left(-5+\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)\right]\right\}^{-1}. \tag{9}$$

3. ОБОЩЕННЫЙ ЗАКОН СТЕФАНА–БОЛЬЦМАНА

Для вывода обобщенного закона Стефана–Больцмана проинтегрируем (6) по длине волны λ. Ранее было получено [17], что точные значения подобных интегралов выражаются через полилогарифмы [18]

$$F_P=\int_0^\infty f_P(\lambda)d\lambda=16\pi^2\hbar c\times$$
$$\times\int_0^\infty\left\{\lambda\left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}-\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)-1\right]\right\}^{-1}d\lambda=$$
$$=\frac{k^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\Gamma(4)\mathrm{Li}_4\left[\exp\left(\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)\right]T^4=$$
$$=\frac{6k^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\mathrm{Li}_4\left[\exp\left(\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)\right]T^4, \tag{10}$$

где $\Gamma(...)$ — гамма-функция, а $\mathrm{Li}_\nu(...)$ — полилогарифм.

Из (10) следует обобщённый закон Стефана–Больцмана (4) с σ, являющейся функцией μ_γ

$$\sigma=\frac{6k^4}{\pi^2c^3\hbar^3}\mathrm{Li}_4\left[\exp\left(\frac{\mu_\gamma}{kT}\right)\right]. \tag{11}$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе впервые получены точные математические выражения обобщенных закона смещения Вина и закона Стефана–Больцмана для теплового излучения, имеющего ненулевой химический потенциал.

Авторы признательны Петеру Вюрфелю (Peter Würfel) за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л.Д., Лившиц И.М.* Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая механика. М.: Наука, 1976. 584 с.
2. *Valluri S.R., Jeffrey D.J., Corless R.M.* Some applications of the Lambert W function to physics // Canadian J. Phys. 2000. V. 78. № 9. P. 823–831.
3. *Vial A.* Fall with linear drag and Wien’s displacement law: approximate solution and Lambert function // Eur. J. Phys. 2012. V. 33. № 4. P. 751–755.
4. *Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К.* W-функция Ламберта и ее применение в математических задачах физики. Саров: ФГУП «РФЯЦ–ВНИИЭФ», 2006. 160 с.
5. *Dubinov A.E., Dubinova I.D.* How can one solve exactly some problems in plasma theory // J. Plasma Phys. 2005. V. 71. № 5. P. 715–721.
6. Физическая энциклопедия. Т. 4. Под. ред. Прохорова А.М. М.: Большая Российская энциклопедия, 1994. 704 с.
7. *Русин С.П., Пелецкий В.Э.* Тепловое излучение полостей. М.: Энергоатомиздат, 1987. 152 с.
8. *Herrmann F., Würfel P.* Light with nonzero chemical potential // Amer. J. Phys. 2005. V. 73. № 8. P. 717–721.
9. *Würfel P.* The chemical potential of radiation // J. Phys. C. 1982. V. 15. № 18. C. 3967–3985.
10. *Markvart T.* The thermodynamics of optical tendue // J. Opt. A. 2008. V. 10. № 1. P. 015008-1–7.
11. *Зельдович Я.Б.* Взаимодействие свободных электронов с электромагнитным излучением // УФН. 1975. Т. 115. № 2. С. 181–197.
12. *Дубинов А.Е.* Точное стационарное решение кинетического уравнения Компанейца // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. № 6. С. 25–30.
13. *Würfel P.* Physics of solar cells. Weinheim: Wiley-Verlag, 2009. 186 p.
14. *Ruppel W., Würfel P.* Upper limit for the conversion of solar energy // IEEE Trans. Electron Devices. 1980. V. 27. № 1. P. 877–882.
15. *Markvart T.* Detailed balance for ideal single-stage fluorescent collectors // J. Appl. Phys. 2006. V. 99. № 2. P. 026101-1–3.
16. *Markvart T.* Thermodynamics of losses in photovoltaic conversion // Appl. Phys. Lett. 2007. V. 91. № 6. P. 064102-1–3.
17. *Дубинов А.Е., Дубинова А.А.* Нелинейные изотермические волны в вырожденной электронной плазме // Физика плазмы. 2008. Т. 34. № 5. С. 442–452.
18. *Lewin L.* Structural properties of polylogarithms. Providence: Amer. Math. Soc., 1991. 409 p.