УДК 517.968: 531.743

РЕКОНСТРУКЦИЯ СМАЗАННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

© 2007 г. **М. В. Римских**; **В. О. Евсеев**; **В. С. Сизиков**, доктор техн. наук

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: romefamily@yandex.ru, vadimjevsejev@yandex.ru, sizikov2000@mail.ru

Рассмотрена задача реконструкции смазанных изображений. Задача сводится к решению множества одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки. Проверено сравнение двух методов решения таких уравнений: метода преобразования Фурье и метода квадратур (с использованием метода регуляризации Тихонова в обоих случаях). Приведены численные результаты, сделан вывод, что метод квадратур более эффективен, чем метод преобразования Фурье.

Коды OCIS: 100.0100, 100.2000.

Поступила в редакцию 30.05.2007.

Введение

Как известно [1], обработка изображений включает в себя устранение искажений, распознавание объектов и кодирование изображений. При этом искажения изображений могут быть следующих типов: искажения, устранение которых не требует математической обработки – царапины на снимке, неоптимальная яркость и контрастность; искажения, требующие примитивной математической обработки – геометрические искажения, требующие изменения масштаба или устранения нелинейности; физико-технические искажения (аберрации) – искажения, формируемые оптической системой (линзой) в силу ее несовершенства (геометрические – сферическая, кома, астигматизм, дисторсия, кривизна поля изображения и хроматическая) [2]; дифракция света на диафрагмах и оправах линз, обусловленная волновой природой света; искажения, требующие сложной математической обработки – смаз, дефокусировка, зашумленность изображения [1, 3–8].

В данной работе рассматривается задача реконструкции (восстановления, реставрации) смазанных изображений. Под изображением подразумевается фотоснимок или оптико-электронное воспроизведение объекта природы, текста, человека, здания, самолета, автомобиля, космического объекта, наземного объекта из космоса и т. д.

Обычно задача реконструкции смазанных изображений описывается совокупностью одномерных интегральных уравнений Фредгольма I рода типа свертки [3–8]. Как правило, такие уравнения решаются методом преобразования Фурье (ПФ) и регуляризации Тихонова (для устойчивости) [3, 4, 6–11]. Использование метода ПФ дает такие достоинства его компьютерной реализации, как экономию памяти (поскольку используются лишь одномерные массивы) и, как принято считать [3, 4, 10], высокую скорость обработки (особенно при использованиии быстрого ПФ). Однако метод ПФ отягощен такими "неудачными" свойствами дискретного и быстрого ПФ, как периодичность, эффект наложения и др. [7, 10], которые могут приводить к перестановке местами половин изображения (см. далее) и другим эффектам. Кроме того, не очевидно, что метод ПФ имеет более высокую скорость реализации, чем, например, метод квадратур [7, 9, 10] в некоторой его модификации. Однако метод квадратур для решения интегрального уравнения типа свертки практически не используется (см. [9, 10]).

Цель работы – применить для решения интегральных уравнений типа свертки, описывающих задачу реконструкции смазанных изображений, метод квадратур (с регуляризацией Тихонова), рассмотреть его быструю реализацию и сравнить его с методом преобразования Фурье (также с регуляризацией Тихонова).

Математическое описание задачи реконструкции смазанного изображения

Рассмотрим данную задачу на примере смазанного фотоснимка объекта (см. рис. 1). Полагаем, что объект является плоским (ввиду дальности расстояния f_1 до него), а его плоскость и плоскость фотопленки расположены параллельно апертуре линзы фотоаппарата. Далее полагаем, что за время экспозиции фотоаппарат с фотопленкой совершил прямолинейный и равномерный сдвиг (смещение) на величину Δ в плоскости пленки. Можно также считать, что сдвиг совершил объект (например, подвижная цель) на величину $\Delta' = -\Delta f_1/f_2$, где f_2 – расстояние от фотопленки до линзы. В результате на фотопленке зафиксируется смазанное изображение типа рис. 1.

Оценим по штрихам на снимке направление смаза и его величину Δ. Направим вдоль смаза ось x

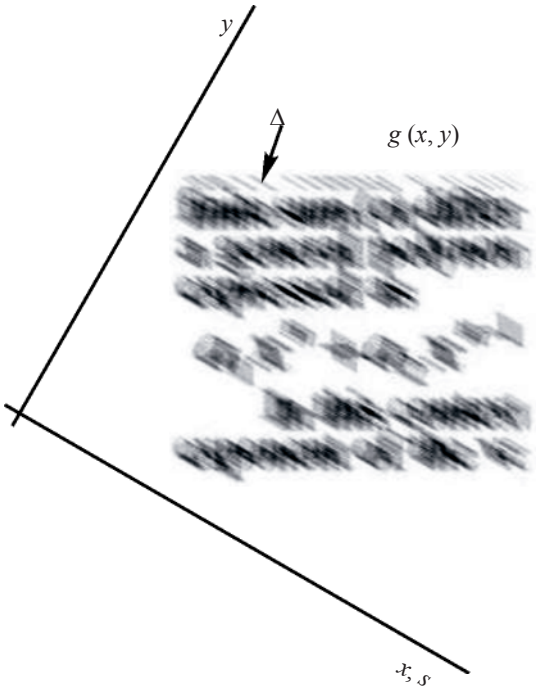


Рис. 1. Смазанное изображение. $g(x, y)$ – распределение интенсивности по изображению, Δ – сдвиг (смаз), ось x направлена вдоль смаза.

(и ось s), а перпендикулярно ему – ось y. Математически задача смазывания изображения описывается соотношением [3–8]

$$\frac{1}{\Delta}\int_{x}^{x+\Delta} w(s,y)ds = g(x,y), \qquad (1)$$

где $g(x, y)$ – функция, описывающая распределение интенсивности по смазанному изображению, а $w(s, y)$ – искомая функция, описывающая распределение интенсивности по неискаженному изображению – тому изображению, которое было бы получено на фотопленке в отсутствие сдвига, т. е. при $\Delta = 0$. При этом sy – неподвижная система координат, а xy – система координат, связанная с движущейся фотопленкой.

Отметим, что под функциями $g(x, y)$ и $w(s, y)$ подразумеваются только амплитуды излучения без учета фазы (как в голографии). Отметим также, что если на фотопленке (или другом носителе) фиксируется полутоновое изображение (grayscale) [12, с. 470], то под $g(x, y)$ и $w(s, y)$ будем подразумевать интенсивности $g_g(x, y)$ и $w_g(s, y)$ в сером цвете. Если же фиксируется цветное изображение, то под записью (1) будем подразумевать три соотношения для трех цветов – красного, зеленого и синего (R, G, B), причем с помощью светофильтров нужно сначала получить $g_R(x, y)$, $g_G(x, y)$, $g_B(x, y)$, затем восстановить $w_R(s, y)$, $w_G(s, y)$, $w_B(s, y)$ и, наконец, вычислить $w(s, y) = w_R(s, y) + w_G(s, y) + w_B(s, y)$. При этом для получения большой градации интенсивностей необходимо использовать соответствующий формат чисел, например, uint8, double и т. д. [12, с. 473, 475].

Преобразование соотношения (1)

Соотношение (1) является неклассическим одномерным интегральным уравнением Вольтерра I рода относительно искомой функции $w(s, y)$ при каждом фиксированном значении y, играющем роль параметра, другими словами, (1) есть множество одномерных интегральных уравнений.

Отметим, что в ряде работ [3, 4] рассмотрены более сложные задачи: неравномерный и/или непрямолинейный сдвиг фотоаппарата или объекта, непараллельность плоскостей фотопленки и объекта и т. д.

Запишем уравнение (1) в виде (опустив y)

$$\frac{1}{\Delta}\int_{x}^{x+\Delta} w(s)ds = g(x), \qquad (2)$$

где $w(s) \equiv w(s, y)$, $g(x) \equiv g(x, y)$.

Методы решения уравнения (2) недостаточно разработаны ввиду того, что оно является неклассическим, нестандартным (оба предела интегрирования переменны, отсутствует в явном виде ядро) [11]. Однако уравнение (2) можно преобразовать к уравнению в стандартной форме, а именно к одномерному интегральному уравнению Фредгольма I рода типа свертки [3–8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)w(s)ds = g(x), \quad -\infty < x < \infty, \qquad (3)$$

где

$$k(x) = \begin{cases} 1/\Delta, & x \in [-\Delta, 0], \\ 0, & x \notin [-\Delta, 0]. \end{cases} \qquad (4)$$

Задачи решения уравнений (2) и (3) являются некорректными (неустойчивыми), причем "степень неустойчивости" уравнения (3) выше, чем уравнения (2) [8, 11]. Однако устойчивые методы решения уравнений типа (3) достаточно подробно разработаны [4, 7–10]. Основным (устойчивым) методом решения уравнения (3) считается метод ПФ с регуляризацией Тихонова [3, 4, 6–10]. Назовем его первым методом.

Однако в данной работе мы хотим показать, что еще более эффективным (и также устойчивым) является метод квадратур с регуляризацией Тихонова. Назовем его вторым методом.

Два метода решения интегрального уравнения

Регуляризованное (устойчивое) решение уравнения (3) методом ПФ с регуляризацией Тихонова имеет вид [3, 4, 6–10]

$$w_\alpha(s) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} W_\alpha(\omega) e^{-i\omega s} d\omega, \qquad (5)$$

где регуляризованный фурье-спектр решения

$$W_\alpha(\omega) = \frac{K(-\omega)G(\omega)}{L(\omega) + \alpha\omega^{2p}}, \qquad (6)$$

причем

$$K(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} k(x) e^{i\omega x} dx = \frac{\sin(\omega\Delta)}{\omega\Delta} + \frac{\cos(\omega\Delta) - 1}{\omega\Delta} i, \quad (7)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{i\omega x} dx \qquad (8)$$

– фурье–спектры ядра $k(x)$ и правой части $g(x)$ уравнения (3), $L(\omega) = |K(\omega)|^2 = K(\omega)K(-\omega)$, $\alpha > 0$ – параметр регуляризации, $p = 1, 2, 3, \ldots$ – порядок регуляризации (обычно $p = 1$).

При практической реализации первого метода вычисления обратного и прямого преобразований Фурье (5), (7), (8) выполняются в виде дискретного преобразования Фурье (ДПФ) или быстрого преобразования Фурье (БПФ).

Выбор α можно осуществлять, например, обобщенным принципом невязки [4, 9, 10]. Однако для задачи реконструкции изображений, как показала практика, более эффективен способ подбора (подробности см. в [5–8]).

Теперь рассмотрим решение уравнения (3) методом квадратур с регуляризацией Тихонова (вторым методом). Будем полагать, что при некотором фиксированном y правая часть $g(x)$ задана при $x \in [c, d]$, а функция $w(s)$ ищется при $s \in [a, b]$ (обычно $[a, b] \subseteq [c, d]$). При этом уравнение типа свертки (3) будем рассматривать как уравнение общего типа

$$Aw \equiv \int_a^b k(x,s)\, w(s)\, ds = g(x), \;\; c \le x \le d, \qquad (9)$$

где

$$k(x,s) = k(x-s) = \begin{cases} 1/\Delta, & x - s \in [-\Delta, 0], \\ 0, & x - s \notin [-\Delta, 0], \end{cases} \qquad (10)$$

A – интегральный оператор.

Применение метода регуляризации Тихонова к уравнению (9) порождает интегральное уравнение II рода [7–10]

$$\alpha w_\alpha(t) + \int_a^b R(t,s) w_\alpha(s) ds = F(t), \;\; a \le t \le b \qquad (11)$$

с новым (симметричным, положительно определенным) ядром

$$R(t,s) = R(s,t) = \int_c^d k(x,t)\, k(x,s)\, dx \qquad (12)$$

и с новой правой частью

$$F(t) = \int_c^d k(x,t) g(x) dx. \qquad (13)$$

Здесь w_α – регуляризованное решение (зависящее от параметра регуляризации α).

Для численного решения уравнения (11) используем метод квадратур. Полагаем, что при некотором фиксированном y правая часть $g(x)$ задана на равномерной сетке узлов: $x_i = c + hi$, $i = 0, 1, \ldots, m$, $x_m = d$, а решение $w(s)$ ищется, вообще говоря, на другой равномерной сетке: $s_j = t_j = a + hj$, $j = 0, 1, \ldots, n$, $s_n = t_n = b$, где $h = \Delta x = \Delta s = \Delta t = \text{const}$ – шаг дискретизации по x, s и t (более общие случаи неравномерных сеток рассмотрены в [7–10]). При этом пределы c, d, a и b зависят от y.

Интегралы в (11)–(13) аппроксимируем конечными суммами (обычно по формуле трапеций). В результате вместо интегрального уравнения (11) получим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) [7–10]

$$(\alpha C + A^T A) w_\alpha = A^T g, \qquad (14)$$

где C – некоторая диагональная (в частности, единичная) матрица, A – матрица $M \times N$, A^T – транспонированная матрица $N \times M$, где $M = m + 1$, $N = n + 1$ (подробности см. в [7–10]).

У системы уравнений (14) матрица $\alpha C + A^T A$ является квадратной, симметричной, положительно определенной, поэтому для решения СЛАУ (14) обычно используется метод Холецкого [9].

Численная иллюстрация методов

Первый и второй методы проиллюстрируем следующим численным модельным примером (ср. [7, стр. 198, 8, p. 162]). При некотором фиксированном y распределение интенсивности вдоль s на неискаженном изображении описывается следующей функцией (суммой 5 гауссианов):

$$w(s) = 6{,}5\exp\left[-\left(\frac{s+0{,}66}{0{,}085}\right)^2\right] + 9\exp\left[-\left(\frac{s+0{,}41}{0{,}075}\right)^2\right] + 12\exp\left[-\left(\frac{s-0{,}14}{0{,}084}\right)^2\right] + 14\exp\left[-\left(\frac{s-0{,}41}{0{,}095}\right)^2\right] + 9\exp\left[-\left(\frac{s-0{,}67}{0{,}065}\right)^2\right], \qquad (15)$$

$s \in [a, b]$, $a = -0{,}85$, $b = 0{,}85$, ядро $k(x)$ – также гауссиана:

$$k(x) = \sqrt{q/\pi}e^{-qx^2}, \qquad (16)$$

$q = 47$. Такое ядро примерно соответствует ядру (4) при $\Delta \approx 0{,}3$.

Сначала решалась прямая задача: путем численного интегрирования вычислялась функция

$$g(x) = \int_a^b k(x-s)w(s)ds, \; c \le x \le d \qquad (17)$$

на дискретной сетке узлов $x = c, c + h, \ldots, d$, причем $h = 0{,}0125$, $c = -1$, $d = 1$. Затем к значениям $g(x)$ были добавлены погрешности δg, распределенные по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 0{,}05$, что соответствует относительной погрешности $\approx 1\%$. На рис. 2 представлены: интенсивность $w(s)$ вдоль неискаженного изображения (кривая *1*), интенсивность $g(x)$ вдоль смазанного изображения (кривая *2*), ядро $k(x)$ (кривая *3*). Видно, что флуктуации, присутствующие в функции $w(s)$, в значительной степени заглажены в функции $g(x)$.

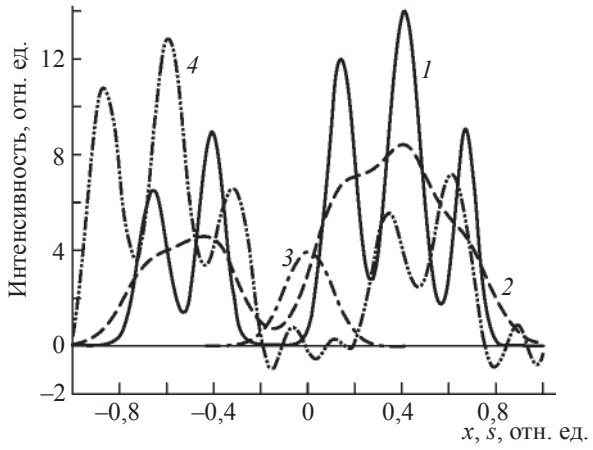


Рис. 2. Реконструкция изображения первым методом при некотором фиксированном значении y. *1* – интенсивность $w(s)$ вдоль неискаженного изображения, *2* – интенсивность $g(x)$ вдоль смазанного изображения, *3* – ядро $k(x)$ интегрального уравнения, *4* – реконструированное распределение интенсивности $w_\alpha(s)$ без перестановки половин решения.

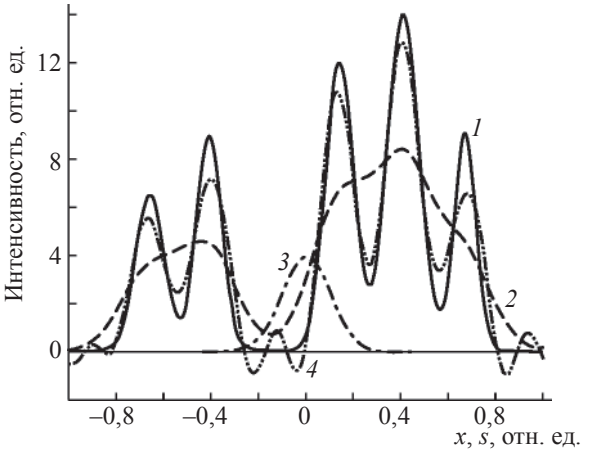


Рис. 3. Реконструкция изображения первым методом при некотором фиксированном значении y. *1*, *2*, *3* – то же, что на рис. 2; *4* – реконструированное распределение интенсивности $w_\alpha(s)$ после перестановки половин решения.

Затем решалась обратная задача – восстановление $w(s)$ по измеренной $\tilde{g}(x) = g(x) + \delta g$ с помощью первого и второго методов.

Решение первым методом уравнения (3) с правой частью $\tilde{g}(x)$ выполнялось по формулам (5)–(8), причем непрерывные преобразования Фурье (НПФ) заменялись ДПФ. При этом использовались одинаковые носители для функций, входящих в (3) (ср. [8, p. 166, 10, с. 39]): $\mathrm{supp}k(x) = w(s) = \tilde{g}(x) \subseteq [c, d]$. Шаг дискретизации $h = \Delta x = \Delta s = 0{,}0125$, число шагов $m(d - c)/h = 160$, число узлов $M = m + 1 = 161$.

На рис. 2 представлено регуляризованное решение (реконструированное распределение интенсивности при некотором фиксированном значении y) $w_\alpha(s)$, рассчитанное первым методом при $p = 1$, $\alpha = 10^{-8}$ (кривая *4*). Видим, что левая и правая половины решения (как обратного ДПФ) оказались переставленными местами. Это часто имеет место для ДПФ и связано с такими его свойствами и понятиями, как периодичность, основной интервал, полуинтервалы и др. [7, стр. 169], [10, стр. 39, 123]. После перегруппировки (перестановки левой и правой половин решения) решение $w_\alpha(s)$ приобрело вид, изображенный на рис. 3 (кривая *4*).

Решение вторым методом уравнения (9) с правой частью $\tilde{g}(x)$ осуществлялось по формулам (11)–(14) на сетках узлов: $x = c, c + h, \ldots, d$, $s = a, a + h, \ldots, b$, $t = a, a + h, \ldots, b$ причем $a = -0{,}85$, $b = 0{,}85$, число узлов по x $M = 161$, а по s и t $N = 137$. На рис. 4 представлено регуляризованное решение $w_\alpha(s)$, полученное вторым методом при $\alpha = 10^{-3{,}5}$ (кривая *3*).

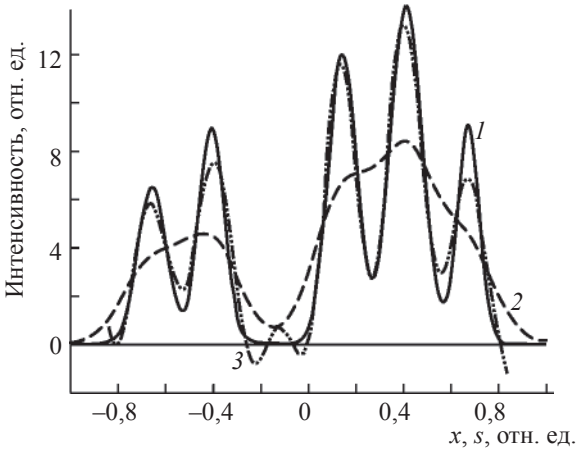


Рис. 4. Реконструкция изображения вторым методом при некотором фиксированном значении y. *1*, *2* – то же, что на рис. 2; *3* – реконструированное распределение интенсивности $w_\alpha(s)$.

Сравнение методов и выводы

Сравнение двух методов (метода ПФ и метода квадратур с регуляризацией Тихонова) позволяет сделать следующие выводы.

1. Оба метода при удачно выбранных направлении смаза изображения, величине смаза Δ и параметре регуляризации α позволяют достаточно эффективно восстанавливать смазанные изображения (см. рис. 3 и 4, а также [6, 7, стр. 65, 8, pp. 193–197]).

2. Точность восстановления обоими методами приблизительно одинакова (ср. рис. 3 и 4). Причем оба метода дают на краях, а также в местах широких областей почти нулевых значений решения $w_\alpha(s)$ ложные знакопеременные флуктуации – эффект Гиббса. Этот эффект можно исключить, полагая $w_\alpha(s) = 0$, если $w_\alpha(s) < 0$. Но можно использовать более совершенный подход, а именно метод регуляризации Тихонова с ограничением на решение $w_\alpha(s)$ ввиду его положительности [10, стр. 118]. Однако такой подход наиболее эффективен при использовании квадратур, но не ПФ.

3. При программировании первого метода допустимы лишь одномерные массивы, а второй метод использует как одно-, так и двухмерные массивы, т. е. требует большей компьютерной памяти.

4. Первый метод вследствие замены НПФ на ДПФ отягощен такими особенностями ДПФ, как периодичность, эффект наложения, равенство длин носителей функций и др. [7, стр. 169, 10, стр. 39, 123]. В результате этого при использовании первого метода могут быть переставлены местами левая и правая половины решения $w_\alpha(s)$ (ср. рис. 2 и 3). Второй метод этого недостатка не имеет.

5. Если в первом методе использовать БПФ для ускорения обработки, например, изображения движущейся цели [8, pp. 196, 197], то при каждом значении y число отсчетов M вдоль x (см. рис. 1) должно быть целой степенью числа 2, иначе значения функции g нужно искусственно дополнять нулями или же использовать обычное ДПФ, что может снизить скорость обработки. Во втором методе числа узлов M и N могут быть произвольными (вообще говоря, зависящими от y). Если же требуется высокая скорость обработки, то второй метод может быть модифицирован следующим образом. Запишем решение СЛАУ (14) в виде

$$w_\alpha = B_\alpha \mathbf{g}, \qquad (18)$$

где

$$B_\alpha = (\alpha C + A^T A)^{-1} A^T \qquad (19)$$

– матрица $N \times M$, которая может быть заранее рассчитана (может быть одна и та же для всех значений y). В результате реконструкция изображения сведется к умножению матрицы B на вектор $\mathbf{g}$ при каждом значении y. Это – наиболее быстрый алгоритм реконструкции.

Кратко говоря, второй метод реконструкции смазанных изображений обладает большими возможностями, чем первый метод реконструкции.

Заметим, что в данной работе ставилась чисто математическая задача – сравнение двух методов, поэтому мы привели в качестве примера численную реконструкцию лишь отдельной строки изображения. В последующей публикации будет приведена реконструкция целого изображения обоими методами.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 05-08-01304-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бейтс Р., Мак-Доннелл М.* Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989. 336 с.

2. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. Прохоров А.М. М.: Сов. энциклопедия, 1984. 944 с.

3. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Обратные задачи обработки фотоизображений // Некоторые задачи естествознания / Под ред. Тихонова А.Н., Гончарского А.В. М.: Изд-во МГУ, 1987. С. 185–195.

4. *Бакушинский А.Б., Гончарский А.В.* Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1989. 199 с.

5. *Сизиков В.С., Российская М.В., Козаченко А.В.* Обработка смазанного изображения методами дифференцирования, преобразования Хартли и регуляризации Тихонова // Изв. вузов. Приборостроение. 1999. Т. 42. № 7. С. 11–15.

6. *Сизиков В.С., Белов И.А.* Реконструкция смазанных и дефокусированных изображений методом регуляризации // Оптический журнал. 2000. Т. 67. № 4. С. 60–63.

7. *Сизиков В.С.* Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.

8. *Petrov Yu.P., Sizikov V.S.* Well-Posed, Ill-Posed, and Intermediate Problems with Applications. Leiden–Boston: VSP, 2005. 234 p.

9. *Верлань А.Ф., Сизиков В.С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.

10. *Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г.* Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.

11. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 193 с.

12. *Дьяконов В., Абраменкова И.* MATLAB. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник. СПб.: Питер, 2002. 608 с.