

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА ГАРТМАНА

© 2010 г. Д. М. Ляхов, канд. техн. наук

E-mail: dml62-46@mail.ru

ООО производственно-коммерческое предприятие “Союзмаркет”, Москва

Адаптивные зеркала больших размеров используются в различных оптических системах. При изготовлении подобных зеркал или управлении ими проводятся много-кратные измерения их оптических поверхностей. В настоящей работе описан простой, недорогой, достаточно точный и экспрессный метод, специально разработанный для изучения характеристик названных зеркал. Для его реализации требуются только цифровая видеокамера, диафрагма с подсветкой рассеянным светом и программное обеспечение. При работе системы на экране монитора каждые 0,5 с появляется изображение геометрии оптической поверхности. Программа использует созданную математическую модель модифицированного метода Гартмана.

**Ключевые слова:** модифицированный метод Гартмана, математическая модель, регрессионный анализ, адаптивная оптика, цифровая видеокамера, зеркало больших размеров.

Коды OCIS: 010.1080, 080.2740.

Поступила в редакцию 16.04.2010.

### Введение

Метод Гартмана широко используется как в оптическом контроле [1], так и для измерения волновых фронтов в различных адаптивных оптических системах [2]. При всей простоте этого метода в недалеком прошлом он был недостаточно востребован из-за его потенциально более низкой (чем, например, у интерферометрии) точности и высокой трудоемкости. Ситуация резко изменилась с появлением ПЗС-матриц высокого разрешения и современной вычислительной техники.

В настоящей работе описана новая математическая модель, позволяющая применять модифицированный метод Гартмана для изучения характеристик зеркал большого размера. При этом используется простая и недорогая схема, которая в сочетании с созданным программным обеспечением реализует достаточно точный и экспрессный метод. Кроме того, данная модель позволяет работать в условиях, когда нет возможности использовать необходимые для классического метода оптические схемы и сложные устройства юстировки.

### Описание схемы измерения

Суть метода чрезвычайно проста. Принципиальная схема показана на рис. 1. Исследуемое

зеркало 1 размещается на определенном расстоянии от диафрагмы 5 с отверстиями. С помощью этих отверстий, подсвеченных сзади рассеивающим экраном 4 (излучением от ламп 2), на диафрагме формируется система пятен (рис. 2). Экран 4 можно заменить светодиодами, каждый из которых освещает соответствующее отверстие диафрагмы, заклеенное рассеивающей пленкой.

Отраженное от зеркала изображение диафрагмы проецируется объективом на матрицу цифровой видеокамеры 3, а результат записывается в компьютер. Сравнение полученного изображения с эталоном позволяет вычислить

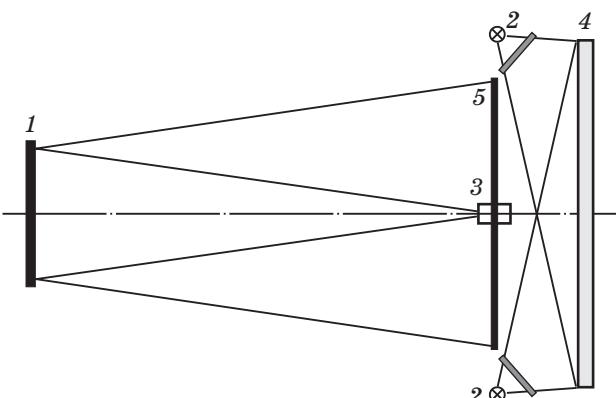


Рис. 1. Принципиальная схема установки.

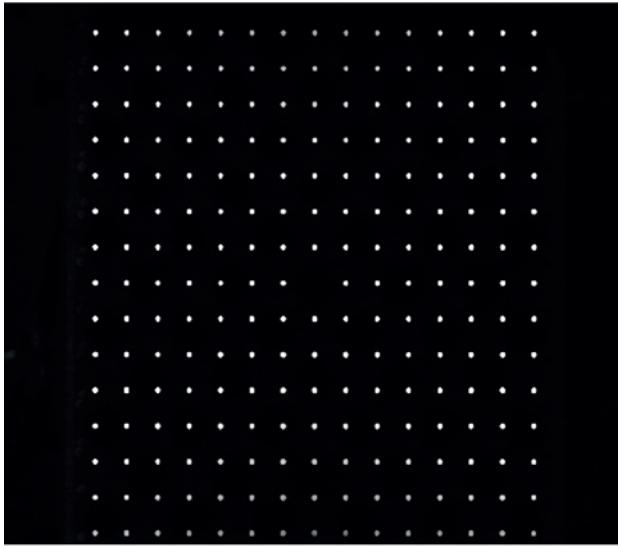


Рис. 2. Вид диафрагмы, зафиксированный видеокамерой.

отклонения центров пятен от их теоретического положения. Используя полученные результаты, можно восстановить форму поверхности (абсолютные измерения). Если измеряются отклонения поверхности зеркала от ее первоначальной формы (относительные измерения), то в качестве эталона принимается первоначальная поверхность зеркала.

### Математическая модель

В предлагаемой оптической схеме (рис. 1) в принципе требуется довольно сложная процедура определения взаимного расположения всех элементов. Чтобы этого избежать, создадим модель для координат центров отраженного от зеркала изображения пятен, которые образуют матрицу наблюдений  $\mathbf{Y}$ . Размер этой матрицы  $2 \times n$ . Первый столбец состоит из  $n$  координат наблюдаемых точек по оси  $x$ , второй – по  $z$ .

$$\begin{aligned} & \|(2L + 2\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)_{i,i}/2L\| \mathbf{2X}\mathbf{P}\mathbf{A}_1 + \\ & + 2L\|(\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)'_{xn} (\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)'_{zn}\| = \mathbf{Y}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\|(2L + 2\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)_{i,i}/2L\|$  – диагональная матрица, состоящая из элементов вектор-столбца  $(2L + 2\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)/(2L)$ , которые характеризуют изменение масштаба изображения в  $i$ -х точках при повороте и перемещении зеркала относительно видеокамеры;  $L$  – расстояние от зеркала до диафрагмы,  $\mathbf{X}$  – матрица, состоящая из столбца единиц и столбцов координат  $(x, z, y)$  заданных точек поверхности зеркала в трехмерном пространстве. При этом

$$y_i = \sum_j^m B_j f_j(x_i, z_i),$$

где  $i = 1 - n$ ,  $n$  – количество точек контроля,  $m$  – количество нелинейных базисных функций  $f_i(x, z)$ , описывающих геометрию оптической поверхности;  $\mathbf{B}$  – вектор-столбец искомых коэффициентов регрессии,  $\mathbf{P}$  – матрица поворота и смещения точек в трехмерной системе координат, состоящая из направляющих косинусов и констант сдвига, –

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} \Delta_1 & \Delta_2 & \Delta_3 \\ \mathbf{p}_{1,1} & \mathbf{p}_{1,2} & \mathbf{p}_{1,3} \\ \mathbf{p}_{2,1} & \mathbf{p}_{2,2} & \mathbf{p}_{2,3} \\ \mathbf{p}_{3,1} & \mathbf{p}_{3,2} & \mathbf{p}_{3,3} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Первая строка – константы сдвига.

Матрица направляющих косинусов  $\mathbf{Pp}$  имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{Pp} = & \begin{vmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ & \times \begin{vmatrix} \cos(\beta) & 0 & -\sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) \\ 0 & \sin(\gamma) & \cos(\gamma) \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  – углы поворота системы координат.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \text{ и } \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} -$$

проекционные матрицы;  $(\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)'_{xn}$ ,  $(\mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_2)'_{zn}$  – частные производные от повернутой и сдвинутой поверхности по новым координатам  $xn$  и  $zn$ . При этом зависимость между исходными и новыми координатами имеет вид

$$\|1 \ x \ z \ y\| \mathbf{PA}_1 = \|xn \ zn\|.$$

Детально рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \mathbf{X}\mathbf{P}\mathbf{A}_1 = & \|\Delta_1 + x_i p_{11} + z_i p_{21} + \\ & + \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B} p_{31} \Delta_2 + x_i p_{12} + z_i p_{22} + \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B} p_{32}\|. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\mathbf{f}(x, z)$  – вектор-строка базисных функций, коэффициенты матрицы  $p_{21}$  и  $p_{31}$  соизмеримы. Значения координат точек меняются от нескольких сот миллиметров до нуля. Поскольку значение  $\mathbf{f}(x, z)\mathbf{B}$  изменяется в пределах нескольких десятков микрометров величинами  $\mathbf{f}(x_i, z_i)\mathbf{B} p$  в данном выражении можно пренебречь.

Рассмотрим выражение

$$\mathbf{XPA}_2 = \Delta_0 + x_i p_{13} + z_i p_{23} + \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B} p_{33}. \quad (4)$$

Здесь все слагаемые соизмеримы, поэтому в дальнейшем в решении регрессионной задачи их надо учитывать.

Полагаем, что значения перечисленных углов ( $\alpha, \beta, \gamma$ ) таковы, что, разлагая синусы и косинусы в ряд Тейлора, можно ограничиться только элементами первого порядка. При этом получим

$$\mathbf{Pp} = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 1 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 1 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

Частные производные вектора  $\mathbf{XPA}_2$  по новым координатам будут равны отношению производных от выражений для новых координат по старым координатам. Например, используя выражения (3) и (4), можно получить

$$(\mathbf{XPA}_2)'_{xn} = \frac{p_{13} + \mathbf{f}(x_i, z_i)'_x \mathbf{B} p_{33}}{p_{11} + \mathbf{f}(x_i, z_i)'_x \mathbf{B} p_{31}}. \quad (6)$$

Учитывая (5) и пренебрегая величинами второго порядка малости, формулу (6) можно упростить

$$(\mathbf{XPA}_2)'_{xn} = -\beta + \mathbf{f}(x_i, z_i)'_x \mathbf{B}. \quad (7)$$

Преобразуем (1) к виду

$$\begin{vmatrix} \frac{\Delta_0}{L} - \beta + 0 + \frac{x_i \Delta_2}{L^2} + \frac{z_i \alpha}{L} - \frac{x_i^2}{L^2} \beta - \frac{x_i z_i}{L^2} \gamma + \frac{x_i \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B}}{2L^2} \\ 0 + \frac{\Delta_1}{L} - \gamma + \frac{z_i \Delta_2}{L^2} - \frac{x_i \alpha}{L} - \frac{1}{L^2} z_i x_i \beta - \frac{z_i^2}{L^2} \gamma + \frac{z_i \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B}}{2L^2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{f}(x_i, z_i)'_x \\ \mathbf{f}(x_i, z_i)'_z \end{vmatrix} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}^1 - 2\mathbf{X}_t^1 \\ \mathbf{Y}^2 - 2\mathbf{X}_t^2 \end{vmatrix} \frac{1}{2L},$$

где  $\mathbf{Y}^1$  и  $\mathbf{Y}^2$  – соответственно первый и второй столбцы матрицы  $\mathbf{Y}$ , а  $\mathbf{X}_t^1$  и  $\mathbf{X}_t^2$  – соответственно первый и второй столбцы матрицы  $\mathbf{X}_t$ .

Упрощая запись, получим

$$\begin{vmatrix} 1_i & 0_i & \frac{x_i}{L^2} & \frac{z_i}{L} & -\frac{x_i^2}{L^2} & -\frac{x_i z_i}{L^2} & \mathbf{f}(x_i, z_i)'_x + \frac{x_i \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B}}{2L^2} \\ 0_i & 1_i & \frac{z_i}{L^2} & -\frac{x_i}{L} & -\frac{z_i x_i}{L^2} & -\frac{z_i^2}{L^2} & \mathbf{f}(x_i, z_i)'_z + \frac{z_i \mathbf{f}(x_i, z_i) \mathbf{B}}{2L^2} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \Delta_2 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \mathbf{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{Y}^1 - 2\mathbf{X}_t^1 \\ \mathbf{Y}^2 - 2\mathbf{X}_t^2 \end{vmatrix} \frac{1}{2L}.$$

Последнее выражение запишем в виде

$$\mathbf{F}\Theta = \mathbf{Yp}, \quad (11)$$

$$2\mathbf{X}(\mathbf{I} + \mathbf{Ppp})\mathbf{A}_1 + \frac{\|(2\mathbf{X}(\mathbf{I} + \mathbf{Ppp})\mathbf{A}_2)_{i,i}\| 2\mathbf{X}(\mathbf{I} + \mathbf{Ppp})\mathbf{A}_1}{2L} + \\ + 2L \|( \mathbf{XPA}_2)'_{xn} (\mathbf{XPA}_2)'_{zn} \| = \mathbf{Y},$$

где

$$\mathbf{I} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{Ppp} = \begin{vmatrix} \Delta_0 & \Delta_1 & \Delta_2 \\ 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Пренебрегая величинами второго порядка малости, получим

$$2\mathbf{X}(\mathbf{Ppp})\mathbf{A}_1 + \frac{\|(2\mathbf{XPpp}\mathbf{A}_2 + 2\mathbf{XIA}_2)_{i,i}\| 2\mathbf{XIA}_1}{2L} + \\ + 2L \|( \mathbf{XPA}_2)'_{xn} (\mathbf{XPA}_2)'_{zn} \| = \mathbf{Y} - 2\mathbf{XIA}_1. \quad (9)$$

С учетом (7) и (8) выражение (9) можно сделать более наглядным –

$$2\mathbf{X}(\mathbf{Ppp})\mathbf{A}_1 + \frac{\|(2\mathbf{XPpp}\mathbf{A}_2 + 2\mathbf{XIA}_2)_{i,i}\| 2\mathbf{XIA}_1}{2L} + \\ + 2L \|- \beta + \mathbf{f}(x_i, z_i)'_x \mathbf{B} - \gamma + \mathbf{f}(x_i, z_i)'_z \mathbf{B} \| = \mathbf{Y} - 2\mathbf{X}_t, \quad (10)$$

где  $\mathbf{X}_t$  – матрица теоретических значений координат эталонных точек по осям  $x$  и  $z$ . Выражение (10) приведем к виду

где

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1_i & 0_i & \frac{x_i}{L^2} & \frac{z_i}{L} & -\frac{x_i^2}{L^2} & -\frac{x_i z_i}{L^2} & \mathbf{f}(x_i, z_i)_x' + \frac{x_i \mathbf{f}(x_i, z_i)}{2L^2} \\ 0_i & 1_i & \frac{z_i}{L^2} & -\frac{x_i}{L} & -\frac{z_i x_i}{L^2} & -\frac{z_i^2}{L^2} & \mathbf{f}(x_i, z_i)_z' + \frac{z_i \mathbf{f}(x_i, z_i)}{2L^2} \end{pmatrix}$$

– матрица базисных функций,

$$\Theta = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \Delta_2 \\ \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ B \end{pmatrix}$$

– вектор искомых коэффициентов регрессии,

$$\mathbf{Yp} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^1 - 2\mathbf{X}_t^1 \\ \mathbf{Y}^2 - 2\mathbf{X}_t^2 \end{pmatrix} / 2L$$

– вектор значений функций отклика.

Применяя метод наименьших квадратов, можно вычислить искомые коэффициенты по известной формуле

$$\Theta = (\mathbf{F}^T \mathbf{F})^{-1} \mathbf{F}^T \mathbf{Yp}.$$

Погрешность данной схемы измерений  $\delta$  определялась с использованием результатов интерферометрического контроля геометрии оптических поверхностей. Среднеквадратические значения изменений данных поверхностей от 0,12 до 2,14 мкм. Погрешность вычислялась по формуле

$$\delta = 2 \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (yg_i - yint_i)^2 - \delta int^2},$$

где  $yg_i$  – значение поверхности в  $i$ -й точке, найденное предлагаемым методом;  $yint_i$  – значение поверхности, найденное методом интерферометрии;  $\delta int$  – погрешность интерферометрии.

Модель (1) учитывает неточность взаимного расположения диафрагмы и контролируемого зеркала (возможный поворот и погрешность масштаба при повороте и изменении расстояния до диафрагмы). Если полагать, что этих погрешностей нет, то модель приобретет вид модели классического метода Гартмана

$$\left\| \mathbf{f}(\mathbf{X}_t)_x' \mathbf{B} \quad \mathbf{f}(\mathbf{X}_t)_z' \mathbf{B} \right\| = \frac{\mathbf{Y} - 2\mathbf{X}_t}{2L}. \quad (12)$$

На практике в общем случае избежать перечисленных погрешностей в данном методе невозможно, поэтому приходится определять углы поворота, смещения и учитывать неточность

масштаба. Однако если в виде эталона вместо теоретических координат мы будем использовать координаты, зафиксированные экспериментально, то опять справедлива модель (12). Такой случай бывает, если мы сравниваем два состояния адаптивного зеркала до и после воздействия на него приводов (относительный метод). Это дает возможность идентифицировать влияние внешнего воздействия на изменение геометрии поверхности зеркала.

Большую роль играет точность определения координат центров экспериментально зафиксированных пятен, соответствующих отверстиям диафрагмы. Для этого используется некоторая аппроксимирующая модель, описывающая их границы [3], после чего вычисляются необходимые центры. Погрешность определения координат центра данным методом меньше 0,1 пикселя. Данная величина определялась при использовании остаточной дисперсии  $S^2$  для относительного метода, рассчитанной по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n-m} \left( \mathbf{Yp}^T \mathbf{2L} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x_i, z_i)_x' \\ \mathbf{f}(x_i, z_i)_z' \end{pmatrix} \mathbf{B} \right)^T \times \left( \mathbf{Yp}^T \mathbf{2L} - \begin{pmatrix} \mathbf{f}(x_i, z_i)_x' \\ \mathbf{f}(x_i, z_i)_z' \end{pmatrix} \mathbf{B} \right) \frac{1}{2}.$$

В этой формуле коэффициент  $1/2$  появился в силу того, что в относительном методе погрешность измерения координат центра отверстий есть как в  $\mathbf{Y}$ , так и в  $\mathbf{X}_t$ .

При неоднократных измерениях различных оптических поверхностей полученные величины  $2S/ms$  были меньше 0,1. Здесь  $ms$  – масштаб. При относительном методе систематические погрешности (например аберрации) взаимно компенсируются.

## Примеры измерений

С помощью разработанных алгоритмов были созданы две программы – для относительного и абсолютного методов измерения. Они применялись для измерения геометрии оптических поверхностей зеркал со свободными краями. В качестве базисных функций использовались собственные колебания пластин со свободными краями

[2, 4]. Такой подход обеспечивает заданную погрешность измерений при минимальном количестве ортонормированных базисных функций.

*Относительное измерение.* Рисунок 3 показывает измеренное с помощью созданной программы влияние центрального привода на геометрию адаптивного зеркала (АЗ). По каждой оси функция вычислена в 32 точках. Размеры отклонений  $Y_{rez}$  даны в миллиметрах. В нашем случае контролировалось адаптивное зеркало с квадратной управляемой апертурой  $210 \times 210$  мм и 61 приводом, оптимальным образом размещенным по шахматной сетке [4]. Для диафрагмы Гартмана были определены следующие параметры:

1) тип решетки – квадратная, 2) число отверстий –  $15 \times 15 - 1$ , 3) область размещения пятен на диафрагме –  $420 \times 420$  мм, 4) диаметр отверстия – 5 мм, 5) расстояние от АЗ до диафрагмы – 2400 мм, 6) размеры матрицы цифровой видеокамеры –  $1392 \times 1040$  пикселов. Точность данного метода  $\pm 0,02$  мкм.

*Абсолютное измерение.* На рис. 4 приведено изображение поверхности АЗ. Точность измерения  $\pm 0,03$  мкм.

Система может работать в режиме “живого” видео. При этом расчет одного изображения контролируемой поверхности длится 0,5 с. Такой режим удобен при настройке адаптивных зеркал.

Данный метод и программы можно применять в сложных условиях и при малых расстояниях между контролируемой зеркальной поверхностью и диафрагмой. Подобная система была поставлена на гравировальном станке. Расстояние от измеряемой поверхности до диафрагмы  $L = 120-250$  мм, контролируемая апертура  $100 \times 100$  мм, точность измерения геометрии оптической поверхности  $\pm 0,7$  мкм, количество отверстий диафрагмы  $10 \times 10 - 1$ . Отверстия диафрагмы подсвечиваются светоизодами, при этом возрастает точность определения координат центров световых пятен. Вся система измерений (диафрагма, подсветка и видеокамера) заняла пространство высотой 70 мм, шириной и длиной –  $220 \times 220$  мм. Система располагалась над измеряемой поверхностью.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Витриченко Э.А., Лукин В.П., Пушной Л.А., Тармаковский В.А. Проблемы оптического контроля. Новосибирск: Наука, 1990. 351 с.

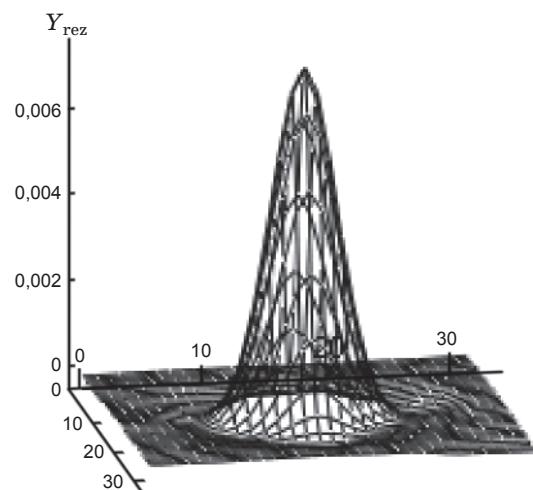


Рис. 3. Влияние центрального привода на геометрию зеркала.

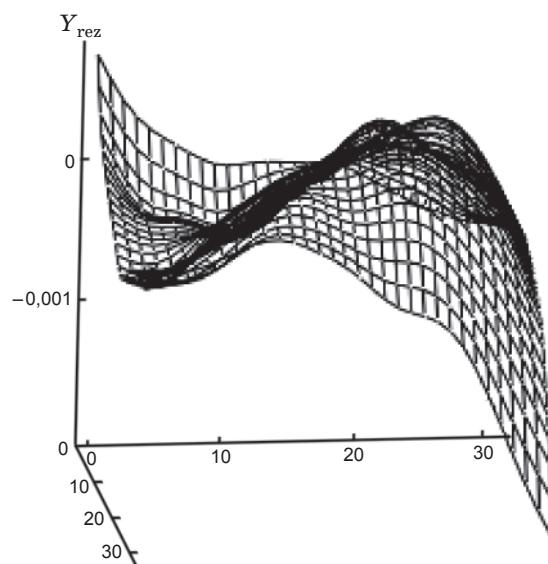


Рис. 4. Геометрия поверхности адаптивного зеркала.

2. Бокало С.Ю., Гаранин С.Г., Григорович С.В., Жупанов В.Г., Колтыгин М.О., Куликов С.М., Ляхов Д.М., Маначинский А.Н., Мизин П.П., Огородников А.В., Смекалин В.П., Смышляев С.П., Сухарев С.А., Шанин О.И., Щипалкин В.И. Деформируемое зеркало на основе пьезоэлектрических приводов для адаптивной системы установки “Искра-6” // Квант. электр. 2007. Т. 37. № 8. С. 691-696.
3. Афонин В.Л., Крайнев А.Ф., Ковалев В.Е., Ляхов Д.М., Слепцов В.В. Обрабатывающее оборудование нового поколения. М.: Машиностроение, 2001. 192 с.
4. Ляхов Д.М. Оптимальное управление формой оптической поверхности пластин с точечными связями // Оптический журнал. 1994. № 7. С. 30-33.