

РАСЧЕТ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРОИЗВОДСТВО ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 535.317.1

ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПЕРЕМЕННОГО УВЕЛИЧЕНИЯ С ДИСКРЕТНОЙ КОМПЕНСАЦИЕЙ РАСФОКУСИРОВКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ

© 2004 г. В. А. Зверев, доктор техн. наук; Т. В. Точилина

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий,
механики и оптики, Санкт-Петербург
E-mail: zverev@unitel.spb.ru, tvtochilina@mail.ru

Получены соотношения, определяющие зависимость поперечного увеличения изображения и перепада увеличения, а также величины расфокусировки изображения от параметров n -компонентной схемы оптической системы переменного увеличения при линейной взаимосвязи перемещений ее компонентов. При этом выражению, определяющему расфокусировку изображения, можно придать вид дроби Чебышева, свойства которой позволяют минимизировать величину остаточной расфокусировки изображения. Показано, что коэффициенты полученных соотношений можно выразить через параметры n -компонентной схемы оптической системы переменного увеличения.

Коды OCIS: 080.0080, 220.0220.

Поступила в редакцию 01.04.2004.

Простейшим вариантом базовой схемы оптической системы переменного увеличения является однокомпонентная схема [1, 2]. Любую оптическую систему из произвольного числа элементов (линз, отражающих поверхностей) при конечном расстоянии между ее главными плоскостями и отличной от нуля оптической силе Φ будем называть однокомпонентной, если при всех возможных подвижках она перемещается как единое целое. При равном нулю расстоянии между главными плоскостями оптическую систему будем называть тонким компонентом.

Определим взаимосвязь параметров линейных перемещений в однокомпонентной схеме оптической системы переменного увеличения. Не нарушая общности подхода к решению задачи, будем считать оптическую систему в рассматриваемом случае тонким компонентом. Рассмотрим вариант линейной взаимосвязи перемещений всех элементов схемы. Для этого обратимся к рисунку, где точками A_0 и A'_0 обозначено положение осевых точек предмета и изображения при исходном положении оптического компонента Φ_0 , точка пересечения совмещенных главных плоскостей которого с оптической осью расположена в точке O_0 . При смещении осевой точки предмета из точки A_0 в точку A , а оптической системы Φ_0 из положения, определяемого точкой O_0 на оптической оси, в положение, определяемое точкой O , параксиальное изображение точки A смес-

тится из точки A'_0 в точку A' . При смещении плоскости изображения относительно плоскости параксиального изображения на расстояние A'_0A' отрезок $A'A'_0$ определит величину остаточной расфокусировки изображения, равную δL . Величины рассматриваемых смещений элементов схемы обозначены через Δ_z , Δ_0 и Δ'_z соответственно. Показатели преломления сред в пространствах предметов и изображений будем считать равными единице. При этом взаимосвязь отрезков z и z' определится формулой Ньютона в виде:

$$zz' = -f_0'^2, \quad (1)$$

а поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой, фокусное расстояние которой равно f'_0 , определяется соотношениями:

$$V = \frac{f'_0}{z} = -\frac{z'}{f'_0}, \quad (2)$$

В соответствии с рисунком имеем

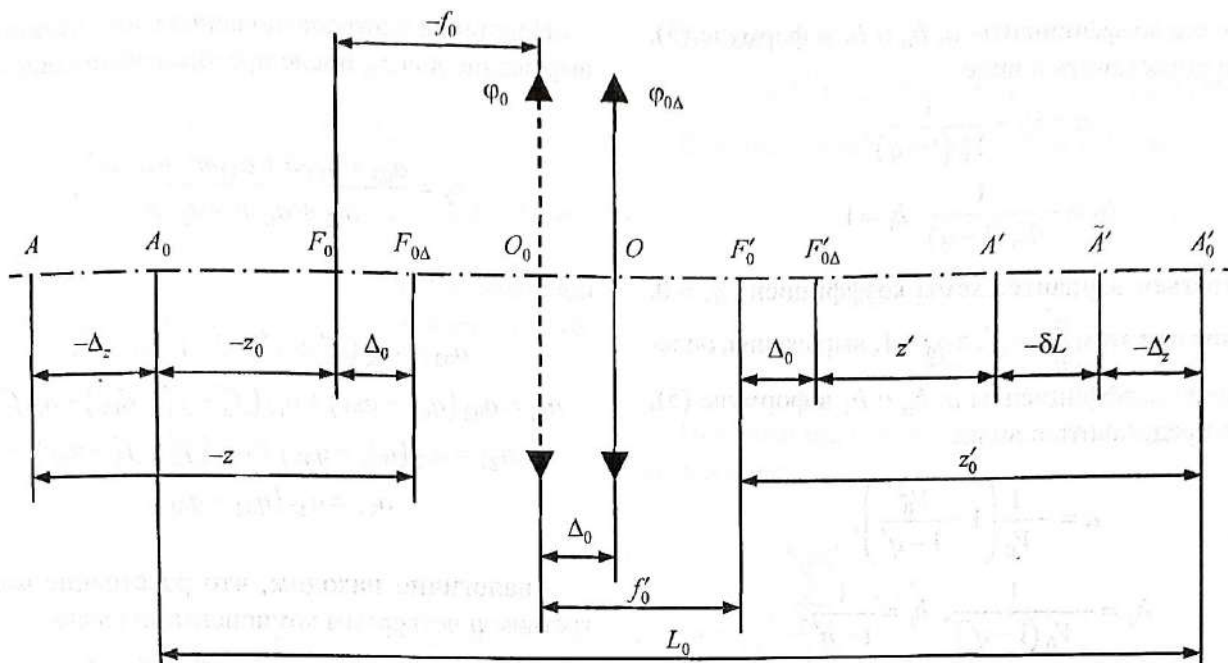
$$z = z_0 + \Delta_z - \Delta_0, \quad (3)$$

$$z'_0 + \Delta'_z = \Delta_0 + z' - \delta L. \quad (4)$$

Из соотношения (4) следует, что

$$\delta L = \Delta_0 + z' - z'_0 - \Delta'_z.$$

Преобразуем это выражение, используя (2) и (3), к виду:



Однокомпонентная схема оптической системы переменного увеличения

$$\delta L = \frac{f'_0(\Delta_0 - \Delta'_z) + V_0(\Delta_0 - \Delta'_z)(\Delta_z - \Delta_0) + f'_0 V_0^2(\Delta_z - \Delta_0)}{f'_0 + V_0(\Delta_z - \Delta_0)}.$$

Выразив линейные величины в масштабе фокусного расстояния f'_0 и обозначив $\Delta_0 = q_0 m$, $\Delta_z = q_z m$, а $\Delta'_z = q'_z m$, где m – величина алгебраическая, получаем

$$\delta L = \frac{m^2 + am}{b_1 m + b_0}, \quad (5)$$

$$\text{где } a = \frac{1}{V_0(q_z - q_0)} \left(1 - V_0^2 \frac{q_z - q_0}{q'_z - q_0} \right),$$

$$b_0 = -[V_0(q'_z - q_0)(q_z - q_0)]^{-1},$$

$$b_1 = -(q'_z - q_0)^{-1}.$$

Известный опыт применения позволяет определить следующие варианты однокомпонентной схемы переменного поперечного увеличения.

1. При неизменном положении плоскостей предмета и изображения смещается оптический компонент.
2. При неизменном положении плоскости изображения смещаются оптический компонент и плоскость предмета. Примером такой схемы может служить оптическая схема фотоувеличителя.
3. При неизменном положении плоскости предмета смещаются оптический компонент и плоскость изображения. Такую схему изменения поперечного увеличения имеем при фотосъемке неподвижных предметов (объектов съемки).

В первом варианте схемы коэффициенты $q_z = q'_z = 0$. При этом выражение (5) принимает вид:

$$\delta L = \frac{V_0 q_0^2 m^2 - (1 - V_0^2) q_0 m}{V_0 q_0 m - 1}. \quad (6)$$

Используя формулу (2), получаем

$$V = \frac{1}{z} = \frac{1}{z_0 - q_0 m} = \frac{V_0}{1 - V_0 q_0 m}. \quad (7)$$

Полагая величину $q_0 m$ при $V_0 = \pm 1$ малой, из выражений (6) и (7) находим, что в этом случае

$$\delta L = \pm \frac{q_0^2 m^2}{1 \pm q_0 m} \approx \pm q_0^2 m^2,$$

$$V = \pm \frac{1}{1 \mp q_0 m} \approx \pm (1 \pm q_0 m + q_0^2 m^2 \pm \dots).$$

Используя выражения (6) и (7), можно показать, что при заданной (или выбранной) величине поперечного увеличения изображения V_0 возможные значения увеличения V при предельно допустимых смещениях плоскости изображения $\delta L_{\text{доп}}$ определяются уравнением

$$V^2 - \left(\frac{1 + V_0^2}{V_0} - \delta L_{\text{доп}} \right) V + 1 = 0.$$

Во втором варианте схемы коэффициент $q'_z = 0$. Положив при этом $\frac{q_z}{q_0} = q$, а $q_0 = 1$, выражения, опре-

деляющие коэффициенты a , b_0 и b_1 в формуле (5), можно представить в виде:

$$a = V_0 - \frac{1}{V_0(1-q)},$$

$$b_0 = -\frac{1}{V_0(1-q)}, b_1 = 1.$$

В третьем варианте схемы коэффициент $q_z = 0$. Положив при этом $\frac{q'_z}{q_0} = q'$, $a q_0 = 1$, выражения, определяющие коэффициенты a , b_0 и b_1 в формуле (5), можно представить в виде:

$$a = -\frac{1}{V_0} \left(1 - \frac{V_0^2}{1-q'} \right),$$

$$b_0 = -\frac{1}{V_0(1-q')}, b_1 = \frac{1}{1-q'}.$$

Рассмотрим оптическую схему, состоящую из n тонких компонентов, разделенных конечным воздушным промежутком ($d_{0i} \neq 0$), при этом поперечное увеличение изображения, образованного системой, изменяется при перемещении каждого из компонентов системы на расстояние $\Delta_i = q_{0i}m$, где $q_{0i} = \text{const}$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, а m — переменный параметр (величина алгебраическая). При этом в соответствии с выражением (3) имеем

$$z_1 = z_{01} + \Delta_{z1} - \Delta_{01} = z_{01} + (q_{z1} - q_{01})m = a_{01} + a_{11}m,$$

где $a_{01} = z_{01}$, $a_{11} = q_{z1} - q_{01}$.

Расстояние между первыми двумя компонентами

$$d_1 = d_{01} - q_{01}m + q_{02}m = f'_1 + f'_2 + z'_1 - z_2.$$

Отсюда находим, что

$$z_2 = f'_1 + f'_2 + z'_1 - d_{01} + (q_{01} - q_{02})m =$$

$$= \frac{z_1(f'_1 + f'_2 - d_{01}) + z_1(q_{01} - q_{02})m - f_1'^2}{z_1} =$$

$$= \frac{a_{02} + a_{12}m + a_{22}m^2}{a_{01} + a_{11}m},$$

где

$$a_{02} = a_{01}(f'_1 + f'_2 - d_{01}) - f_1'^2,$$

$$a_{12} = a_{01}(q_{01} - q_{02}) + a_{11}(f'_1 + f'_2 - d_{01}),$$

$$a_{22} = a_{11}(q_{01} - q_{02}).$$

Расстояние между вторым и третьим компонентами системы равно

$$d_2 = d_{02} - q_{02}m + q_{03}m = f'_2 + f'_3 + z'_2 - z_3.$$

Отсюда следует, что

$$z_3 = f'_2 + f'_3 + z'_2 - d_{02} + (q_{02} - q_{03})m =$$

$$= \frac{z_2(f'_2 + f'_3 - d_{02}) - f_2'^2 + z_2(q_{02} - q_{03})m}{z_2}.$$

Подставив в это соотношение соответствующее выражение для z_2 , после преобразования получаем

$$z_3 = \frac{a_{03} + a_{13}m + a_{23}m^2 + a_{33}m^3}{a_{02} + a_{12}m + a_{22}m^2},$$

где

$$a_{03} = a_{02}(f'_2 + f'_3 - d_{02}) - a_{01}f_2'^2,$$

$$a_{13} = a_{02}(q_{02} - q_{03}) + a_{12}(f'_2 + f'_3 - d_{02}) - a_{11}f_2'^2,$$

$$a_{23} = a_{12}(q_{02} - q_{03}) + a_{22}(f'_2 + f'_3 - d_{02}),$$

$$a_{33} = a_{22}(q_{02} - q_{03}).$$

Аналогично находим, что расстояние между третьим и четвертым компонентами равно

$$d_3 = d_{03} - q_{03}m + q_{04}m = f'_3 + f'_4 + z'_3 - z_4.$$

При этом

$$z_4 = f'_3 + f'_4 + z'_3 - d_{03} + (q_{03} - q_{04})m =$$

$$= \frac{z_3(f'_3 + f'_4 - d_{03}) - f_3'^2 + z_3(q_{03} - q_{04})m}{z_3}.$$

Соответствующее выражение для z_3 позволяет преобразовать полученное соотношение к виду:

$$z_4 = \frac{a_{04} + a_{14}m + a_{24}m^2 + a_{34}m^3 + a_{44}m^4}{a_{03} + a_{13}m + a_{23}m^2 + a_{33}m^3},$$

где

$$a_{04} = a_{03}(f'_3 + f'_4 - d_{03}) - a_{02}f_3'^2,$$

$$a_{14} = a_{03}(q_{03} - q_{04}) + a_{13}(f'_3 + f'_4 - d_{03}) - a_{12}f_3'^2,$$

$$a_{24} = a_{13}(q_{03} - q_{04}) + a_{23}(f'_3 + f'_4 - d_{03}) - a_{22}f_3'^2,$$

$$a_{34} = a_{23}(q_{03} - q_{04}) + a_{33}(f'_3 + f'_4 - d_{03}),$$

$$a_{44} = a_{33}(q_{03} - q_{04}).$$

Из анализа полученных соотношений вполне просматривается закономерность определения отрезка z_i в общем случае выражением вида:

$$z_i = \frac{\sum_{k=0}^{k=i} a_{ki}m^k}{\sum_{k=0}^{k=i-1} a_{ki-1}m^k}, \quad (8)$$

где $i > 1$.

Для доказательства справедливости этого выражения применим метод математической индукции.

Пусть $i = 2$. При этом в соответствии с принятым выражением имеем

$$z_2 = \frac{a_{02} + a_{12}m + a_{22}m^2}{a_{01} + a_{11}m}.$$

Вид этого выражения полностью совпадает с точным выражением, полученным ранее.

Предположим, что выражение (8) справедливо при всех i , для которых $2 \leq i \leq n$. Покажем, что это выражение справедливо и при $i = n + 1$.

При $i = n + 1$ имеем

$$d_n = d_{0n} - q_{0n}m + q_{0n+1}m = f'_n + f'_{n+1} + z'_n - z_{n+1}.$$

Отсюда

$$z_{n+1} = f'_n + f'_{n+1} + z'_n - d_{0n} + (q_{0n} - q_{0n+1})m.$$

В соответствии с выражением (8) отрезок

$$z_n = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}.$$

При этом последнее выражение можно представить в виде:

$$\begin{aligned} z_{n+1} &= f'_n + f'_{n+1} - d_{0n} + (q_{0n} - q_{0n+1})m - f_n'^2 \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} = \\ &= \frac{(f'_n + f'_{n+1} - d_{0n}) \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k + (q_{0n} - q_{0n+1}) \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^{k+1} - f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} = \\ &= \frac{(f'_n + f'_{n+1} - d_{0n}) \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k + (q_{0n} - q_{0n+1}) \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{k-1n} m^k - f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n+1} a_{kn+1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}, \end{aligned}$$

где

$$\sum_{k=0}^{k=n+1} a_{kn+1} m^k = \left[(f'_n + f'_{n+1} - d_{0n}) \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} + (q_{0n} - q_{0n+1}) \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{k-1n} - f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} \right] m^k.$$

Итак, в соответствии с аксиомой индукции выражение (8) справедливо при всех $i > 1$.

В оптической схеме, состоящей из n тонких компонентов, разделенных конечным воздушным промежутком, в общем случае расстояние от осевой точки предмета до осевой точки ее параксиального изображения равно

$$\begin{aligned} L &= -z_1 + f'_1 + d_1 + d_2 + \dots + d_{n-2} + d_{n-1} + f'_n + z'_n = \\ &= -z_{01} - q_z m + q_{01}m + f'_1 + d_{01} + q_{01}m + q_{02}m + d_{02} + \\ &\quad + q_{02}m + q_{03}m + d_{03} + q_{03}m + \dots + q_{0n-2}m + d_{0n-2} - \\ &\quad - q_{0n-2}m + q_{0n-1}m + d_{0n-1} + q_{0n-1}m + q_{0n}m + f'_n + z'_n = \\ &= -z_{01} - q_z m + f'_1 + d_{01} + d_{02} + \dots + d_{0n-1} - q_{0n}m + f'_n + z'_n. \end{aligned}$$

При исходном положении элементов схемы это расстояние равно

$$L_0 = -z_{01} + f'_1 + d_{01} + d_{02} + \dots + d_{0n-1} + f'_n + z'_{0n}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \Delta L &= L - L_0 = -z_{01} + q_z m + f'_1 + d_{01} + d_{02} + \dots + \\ &\quad + d_{0n-1} + q_{0n}m + f'_n + z'_n + z_{01} - f'_1 - d_{01} - \\ &\quad - d_{02} - \dots - d_{0n-1} - f'_n - z'_{0n} = -q_z m + q_{0n}m + z'_n - z'_{0n}. \end{aligned}$$

Вполне очевидно, что смещение предмета на расстояние, равное $q_z m$, влияет на величину отрезка z'_n , однако непосредственного влияния на величину расфокусировки изображения не оказывает. Следовательно, приняв за отсчетную точку исходное положение осевой точки предмета, находим, что расфокусировка изображения в рассматриваемом случае равна

$$\Delta L_0 = \Delta L + q_z m = z'_n - z'_{0n} + q_{0n}m = \delta L + q'_z m.$$

При возможном смещении плоскости изображения относительно гауссовой плоскости изображе-

ния на расстояние $q'_z m$ остаточная расфокусировка равна

$$\delta L = \Delta L_0 - q'_z m = z'_n - z'_{0n} + (q_{0n} - q'_z) m.$$

В этом выражении

$$z'_n = -\frac{f_n'^2}{z_n}.$$

В соответствии с выражением (8) имеем

$$z'_n = -f_n'^2 \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}. \quad (9)$$

Представим это выражение в виде:

$$z'_n = -f_n'^2 \frac{a_{0n-1} + \sum_{k=1}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{a_{0n} + \sum_{k=1}^{k=n} a_{kn} m^k}.$$

При $m = 0$ получаем

$$z'_{0n} = -f_n'^2 \frac{a_{0n-1}}{a_{0n}}. \quad (10)$$

При этом

$$\begin{aligned} \delta L &= -f_n'^2 \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} + \frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} f_n'^2 + (q_{0n} - q'_z) m = \\ &= \frac{-f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k + f_n'^2 \frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k + (q_{0n} - q'_z) \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^{k+1}}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} = \\ &= \frac{-f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k + f_n'^2 \frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k + (q_{0n} - q'_z) \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{k-1n} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} = \\ &= \frac{\left[f_n'^2 \frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} - f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} + (q_{0n} - q'_z) \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{k-1n} \right] m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k} \end{aligned}$$

или

$$\delta L = \frac{\sum_{k=0}^{k=n+1} b_{kn+1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}, \quad (11)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=n+1} b_{kn+1} m^k &= \left[f_n'^2 \frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} - f_n'^2 \sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} + \right. \\ &\quad \left. + (q_{0n} - q'_z) \sum_{k=1}^{k=n+1} a_{k-1n} \right] m^k. \end{aligned}$$

Заметим, что при $k = 0$ коэффициент $b_{0n+1} = f_n'^2 a_{0n-1} - f_n'^2 a_{0n-1} = 0$.

При этом выражение (11) можно переписать в виде:

$$\delta L = \frac{\sum_{k=1}^{k=n+1} b_{kn+1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}, \quad (12)$$

где

$$b_{kn+1} = f_n'^2 \left(\frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} a_{kn} - a_{kn-1} \right) + (q_{0n} - q'_z) a_{k-1n}. \quad (13)$$

При $k = 0$ имеем

$$b_{kn+1} = b_{0n+1} = 0,$$

при $k = n + 1$ имеем

$$b_{kn+1} = b_{n+1n+1} = (q_{0n} - q'_z) a_{nn},$$

при $n = 1$ имеем

$$a_{01} = z_{01}, \quad a_{11} = q_{z1} - q_{01},$$

при $n \geq 2$ имеем

$$a_{kn} = (f'_{n-1} + f'_n - d_{0n-1}) a_{kn-1} + (q_{0n-1} - q_{0n}) a_{k-1n-1} - f'^2_{n-1} a_{kn-2}, \quad (14)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, n$, при этом в правой части выражений (13) и (14) сохраняются коэффициенты $a_{\mu\nu}$ при $0 \leq \mu \leq \nu$; $a_{00} = 1$.

Формулу (14) удобно представить в виде:

$$a_{kn} = -\delta_{0n-1} a_{kn-1} + (q_{0n-1} - q_{0n}) a_{k-1n-1} - f'^2_{n-1} a_{kn-2}, \quad (15)$$

где $\delta_{0n-1} = d_{0n-1} - f'_{n-1} - f'_n$.

Используя рекуррентную формулу (15), получаем

$$a_{kn-1} = (q_{0n-2} - q_{0n-1}) a_{k-1n-2} - \delta_{0n-2} a_{kn-2} - f'^2_{n-2} a_{kn-3},$$

$$a_{kn-2} = (q_{0n-3} - q_{0n-2}) a_{k-1n-3} - \delta_{0n-3} a_{kn-3} - f'^2_{n-3} a_{kn-4},$$

$$a_{k3} = (q_{02} - q_{03}) a_{k-12} - \delta_{02} a_{k2} - f'^2_2 a_{k1},$$

$$a_{k2} = (q_{01} - q_{02}) a_{k-11} - \delta_{01} a_{k1} - f'^2_1 a_{k0},$$

$$a_{k1}: \quad a_{01} = z_{01}, \quad a_{11} = q_{z1} - q_{01}.$$

При $k = n$ имеем

$$a_{nn} = (q_{0n-1} - q_{0n}) a_{n-1n-1}.$$

При этом

$$a_{n-1n-1} = (q_{0n-2} - q_{0n-1}) a_{n-2n-2},$$

$$a_{n-2n-2} = (q_{0n-3} - q_{0n-2}) a_{n-3n-3},$$

$$a_{22} = (q_{01} - q_{02}) a_{11},$$

$$a_{11} = q_{z1} - q_{01}.$$

Аналогично находим

$$a_{n-1n} = (q_{0n-1} - q_{0n}) a_{n-2n-1} - \delta_{0n-1} a_{n-1n-1},$$

$$a_{n-2n-1} = (q_{0n-2} - q_{0n-1}) a_{n-3n-2} - \delta_{0n-2} a_{n-2n-2},$$

$$a_{23} = (q_{02} - q_{03}) a_{12} - \delta_{02} a_{22},$$

$$a_{12} = (q_{01} - q_{02}) a_{01} - \delta_{01} a_{11},$$

$$a_{01} = z_{01}.$$

При $k = 0$ имеем

$$a_{0n} = -\delta_{0n-1} a_{0n-1} - f'^2_{n-1} a_{0n-2},$$

$$a_{0n-1} = -\delta_{0n-2} a_{0n-2} - f'^2_{n-2} a_{0n-3},$$

$$a_{03} = -\delta_{02} a_{02} - f'^2_2 a_{01},$$

$$a_{02} = -\delta_{01} a_{01} - f'^2_1 a_{00},$$

$$a_{01} = z_{01},$$

$$a_{00} = 1.$$

Из полученных соотношений следует, что, используя рекуррентную формулу (15), все коэффициенты a_{kn} при $k = 0, 1, 2, \dots, n$ можно выразить через параметры схемы $f'_1, f'_2, \dots, f'_n; \delta_{01}, \delta_{02}, \dots, \delta_{0n-1}; q_{01}, q_{02}, \dots, q_{0n}, q_{z1}$. В общем случае $a_{kn} \neq 0$. При этом в соответствии с соотношением (13) и коэффициенты $b_{kn+1} \neq 0$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n + 1$. Таким образом, числитель дроби (12) определяется степенным рядом $(n + 1)$ -й степени, т. е. принципиально расфокусировка изображения $\delta L = 0$ при $(n + 1)$ -м положении элементов схемы. При этом предполагается, что при $m_1 \leq m \leq m_2$, где m_1 и m_2 — значения величины m при начальном и конечном положениях элементов схемы, знаменатель дроби (12) не имеет корней, т. е. в этом случае $\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k \neq 0$.

Пусть все компоненты схемы одновременно смещаются на одно и то же расстояние, т. е. пусть $q_{0i} = q_{0j} = q_0$. При этом рекуррентная формула (15) принимает вид:

$$a_{kn} = -\delta_{0n-1} a_{kn-1} - f'^2_{n-1} a_{kn-2}. \quad (16)$$

Используя эту формулу, получаем

$$a_{kn-1} = -\delta_{0n-2} a_{kn-2} - f'^2_{n-2} a_{kn-3},$$

$$a_{kn-2} = -\delta_{0n-3} a_{kn-3} - f'^2_{n-3} a_{kn-4},$$

$$a_{k3} = -\delta_{02} a_{k2} - f'^2_2 a_{k1},$$

$$a_{k2} = -\delta_{01} a_{k1} - f'^2_1 a_{k0}.$$

При $k = 0$ имеем

$$a_{0n} = -\delta_{0n-1} a_{0n-1} - f'^2_{n-1} a_{0n-2},$$

$$a_{0n-1} = -\delta_{0n-2} a_{0n-2} - f'^2_{n-2} a_{0n-3},$$

$$a_{03} = -\delta_{02} a_{02} - f'^2_2 a_{01},$$

$$a_{02} = -\delta_{01} a_{01} - f'^2_1 a_{00},$$

$$a_{01} = z_{01},$$

$$a_{00} = 1.$$

Последовательной подстановкой каждого последующего соотношения в предыдущее получим выражение, определяющее коэффициент a_{0n} в зависимости от параметров схемы.

Аналогично можем получить выражение, определяющее коэффициент a_{1n} . Однако легко убедиться, что при $k \geq 2$ коэффициенты $a_{kn} = 0$. При этом в соответствии с выражением (13) имеем

$$b_{0n+1} = 0,$$

$$b_{1n+1} = f'^2_n \left(\frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} a_{1n} - a_{1n-1} \right) + (q_0 - q'_z) a_{0n},$$

$$b_{2n+1} = f'^2_n \left(\frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} a_{2n} - a_{2n-1} \right) + (q_0 - q'_z) a_{1n} = (q_0 - q'_z) a_{1n},$$

$$b_{kn+1} = 0 \text{ при } k \geq 3.$$

Отсюда следует, что при одновременном смещении всех компонентов схемы в направлении оптической оси на одну и ту же величину n -компонентная схема эквивалентна однокомпонентной схеме переменного увеличения образованного ею изображения.

Вполне очевидно, что вид выражения (12) сохраняется, например, при $k = 2i + 1$, где $i = 0, 1, \dots, \frac{n-1}{2}$, или при $k \geq 2i$, где $i = 1, 2, \dots, \frac{1}{2}n$.

П.Л. Чебышев показал [3], что в случае приближенного представления функций в виде дроби с данным знаменателем из всех дробей вида

$$\frac{U}{V} = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^{n-l-1} + b_1 x^{n-l-2} + \dots + b_{n-l-1}} \quad (17)$$

с одинаковым знаменателем

$$b_0 x^{n-l-1} + b_1 x^{n-l-2} + \dots + b_{n-l-1}$$

в промежутке от $x = -h$ до $x = +h$ наименее уклоняется от нуля та, числитель которой U определяется формулой:

$$U = \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - h^2}}{2} \right)^{l+1} \left(\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_1} \left(\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_2} \dots +$$

$$+ \left(\frac{x - \sqrt{x^2 - h^2}}{2} \right)^{l+1} \left(\frac{\alpha_1 x - h^2}{\alpha_1} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_1} \left(\frac{\alpha_2 x - h^2}{\alpha_2} - \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \sqrt{x^2 - h^2} \right)^{l_2} \dots, \quad (18)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ — корни знаменателя дроби V , $l_1, l_2, \dots$ — кратность корней знаменателя, при этом

$$V = b_0 (x - \alpha_1)^{l_1} (x - \alpha_2)^{l_2} \dots$$

Так как знаменатель дроби V не обращается в нуль в промежутке от $x = -h$ до $x = +h$, то значения корней знаменателя лежат вне этого промежутка. Предел отклонения дроби от нуля в этом случае определяется формулой:

$$\delta = \pm \frac{h^n}{2^l b_{n-l-1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_1^2}} \right)^{l_1} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{h^2}{\alpha_2^2}} \right)^{l_2} \dots} \quad (19)$$

Из сопоставления выражений (17) и (12) находим, что в рассматриваемом случае $l = 0$, так как $n - l - 1 = n - 1$. Кроме того, замечаем, что в рассматриваемом случае в числителе дроби (12) отсутствует свободный член. Чтобы привести числитель выражения (12) к виду числителя дроби Чебышева, запишем выражение (12) для некоторого положения плоскости изображения, смещенной относительно положения плоскости параксиального изображения на расстояние Δ' . При этом $\delta L = \delta L + \Delta'$. Подставив в это соотношение выражение (12), получаем

$$\delta \tilde{L} = \frac{\sum_{k=1}^{k=n+1} b_{kn+1} m^k - \Delta' \sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}.$$

Сохранив обозначение остаточной расфокусировки изображения прежним, полученное выражение удобно представить в виде:

$$\delta L = \frac{\sum_{k=0}^{k=n+1} C_{kn+1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}, \quad (20)$$

где

$$C_{kn+1} = f_n'^2 \left(\frac{a_{0n-1}}{a_{0n}} a_{kn} - a_{kn-1} \right) + (q_{0n} - q'_2) a_{k-1n} - \Delta' a_{kn}.$$

В этом случае при $k = 0$ имеем $C_{0n+1} = -\Delta' a_{0n}$. Итак, вид выражения (20) вполне соответствует виду дроби Чебышева. Дроби Чебышева позволяют успешно решать задачу расчета параметров схем оптических систем переменного увеличения [4]. Функциональными параметрами, определяющими смысловое назначение систем переменного уве-

личения, являются значения поперечного увеличения V образованного системой изображения и перепад увеличений M . В соответствии с соотношением (2) поперечное увеличение изображения, образованного i -м компонентом, равно $V_i = \frac{f'_i}{z_i}$. При этом поперечное увеличение изображения, образованного оптической системой из n тонких компонентов, равно

$$V = \frac{f'_1 f'_2 \dots f'_n}{z_1 z_2 \dots z_n}. \quad (21)$$

Используя соотношение (8), имеем

$$z_1 = \sum_{k=0}^{k=1} a_{k1} m^k, \quad z_2 = \frac{\sum_{k=0}^{k=2} a_{k2} m^k}{\sum_{k=0}^{k=1} a_{k1} m^k}, \dots, \\ z_{n-1} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n-2} a_{kn-2} m^k}, \quad z_n = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}{\sum_{k=0}^{k=n-1} a_{kn-1} m^k}.$$

Подставив эти соотношения в выражение (21), в результате очевидных преобразований получаем

$$V = \frac{f'_1 f'_2 \dots f'_n}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k}, \quad (22)$$

при этом, как было показано, используя рекуррентную формулу (15), коэффициенты a_{kn} можно выразить через конструктивные параметры оптической системы.

При $m_1 \leq m \leq m_2$ перепад увеличений определяется выражением:

$$M = \frac{V(m_2)}{V(m_1)} = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m_1^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m_2^k}. \quad (23)$$

При $m_2 = -m_1 = m_0$ имеем

$$M = \frac{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} (-m_0)^k}{\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m_0^k}. \quad (24)$$

Заметим, что выражения (22), (23) и (24) определяют поперечное увеличение изображения и перепад увеличений в параксиальной плоскости изображения, т. е. без учета влияния расфокусировки изображения, которая не должна превосходить допустимой величины.

Подводя итог изложенному, можно сделать следующие выводы:

1. Получены выражения, определяющие зависимость остаточной расфокусировки изображения от параметров n -компонентной схемы оптической системы переменного увеличения при линейной взаимосвязи перемещений ее компонентов.

2. Получены соотношения, определяющие зависимость поперечного увеличения изображения и перепада увеличений от параметров n -компонентной схемы оптической системы переменного увеличения.

3. Вполне очевидно, что n -компонентную схему оптической системы переменного увеличения можно преобразовать в оптическую схему с непрерывной компенсацией расфокусировки изображения, положив один из коэффициентов q_{0i} величиной пе-

ременной, определяемой условием $\sum_{k=0}^{k=n} a_{kn} m^k = 0$.

4. Показано, что для минимизации величины (функции) расфокусировки изображения, образованного n -компонентной оптической системой переменного увеличения, возможно и целесообразно применение дроби Чебышева.

ЛИТЕРАТУРА

1. Журова С.А., Зверев В.А. Однокомпонентная оптическая система переменного увеличения // Оптический журнал. 1998. Т. 65. № 10. С. 26–32.
2. Журова С.А., Зверев В.А. Основы композиции принципиальных схем оптических систем переменного увеличения // Оптический журнал. 1999. Т. 66 № 10. С. 68–86.
3. Чебышев П.Л. Полн. собр. соч. Т. II. Математический анализ. М.-Л.: Изд. АН СССР, 1947. 520 с.
4. Пахомов И.И. Панкратические системы. М.: Машиностроение, 1976. 160 с.