

УДК 621.397.3

Регуляризирующий алгоритм с адаптивным стабилизатором для задачи восстановления изображений

© 2020 г. **Т. И. СЕРЕЖНИКОВА**, КАНД. ФИЗ.-МАТ. НАУК

Институт математики и механики Уральского отделения Российской академии наук, Екатеринбург

E-mail: sti@imm.uran.ru

Поступила в редакцию 19.03.2020

DOI:10.17586/1023-5086-2020-87-07-31-40

Предложена и апробирована новая конструкция двумерного стабилизатора, которая позволяет в процессе итераций использовать и уточнять параметры геометрии сегментов на изображении. Алгоритм обеспечивает возможность и реализует простую эффективную процедуру вычисления контурных точек границ сегментов на заключительных этапах расчетов. Приведены результаты применения алгоритма: одновременное восстановление изображения с имеющимися сегментами на изображении и изображения восстановленных контуров сегментов на изображении.

Ключевые слова: восстановление изображений и сегментов на изображении, двумерное интегральное уравнение Фредгольма первого рода, негладкие решения, регуляризация, адаптация, стабилизация, субградиентный процесс.

Код OCIS: 100.0100

ВВЕДЕНИЕ

Основными целями исследования являются развитие и апробация численных методов тихоновской регуляризации для решения так называемых обратных задач. В данной работе рассматривается задача о восстановлении двумерных изображений до стадии большей пригодности этих изображений для последующего использования в прикладных и научных целях. Задача восстановления изображения рассматривается в виде решения двумерного интегрального уравнения Фредгольма первого рода типа свертки [1]

$$Au \equiv \int_0^1 \int_0^1 K(x-\xi, y-\eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \quad (1)$$

где K — аппаратная функция прибора, характеризующая его отклик на точечный объект

(реакцию на дельта-функцию), f — регистрируемое изображение, u — искомое реконструируемое изображение, A — интегральный оператор. Аппаратная функция и регистрируемое изображение заданы с ошибкой. Точность задания приближенных данных полагается известной.

В работе [2] приведено справедливое замечание, что задача такого рода относится к типу задач, «когда никакое совершенствование измерительного устройства не позволит восстановить искомую функцию без математической обработки измерений».

Для полезных сравнений с другими существующими методами и для планирования дальнейших возможных разработок выделим работы авторов [2–5]. В этих работах используется не только метод регуляризации Тихонова, но и метод параметрической фильтрации Винера, предложен «спектраль-

ный метод» для определения типа искажения изображения (смаз, дефокусировка и др.) и для оценки параметров искажения Δ и θ (значения смаза и угла смаза) и др., предложен способ размытия краев изображения для устранения эффекта Гиббса, для выбора параметра регуляризации α предложен способ модельных примеров, в случае смаза изображения предложено решать построчно набор одномерных интегральных уравнений наряду с решением одного двумерного интегрального уравнения.

В работе [6], заголовок которой для характеристики алгоритма использует словосочетания *“approach to simultaneous reconstruction and segmentation for emission tomography problems”*, похожие на те, что используются и в представляемой здесь работе («одновременные реконструкция и сегментация»), реализуются вероятностные концепции и подходы: постановка и решение задачи осуществляются на основе использования закона Байеса и др.

Предлагаемый в данной работе подход к восстановлению изображений, как будет показано ниже, характеризуется совокупностью следующих свойств: наличием принципиально важных теоретических обоснований, использованием субградиентных процессов, незаслуженно редко используемых в практике вычислений другими авторами, предложением и апробацией оригинальных адаптивных стабилизаторов, «подстраиваемых» с учетом восстанавливаемой в процессе итераций геометрии сегментов изображения, оригинальными модельными расчетами, подтверждающими, что по окончании расчетов графопостроителю передается два массива дискретных значений функций яркости и градиента яркости. Поэтому графические результаты расчетов — это одновременно два графика: функции яркости и контуров сегментов на изображении (график градиента яркости).

В результате алгоритм обеспечивает одновременно повышение качества и восстановление сегментов и контуров сегментов на изображении.

Все перечисленное выше объясняет сложность проведения в данной работе сравнения с подходами других авторов (особенно при отсутствии в их работах важных теоретических обоснований).

Задача восстановления изображения — это некорректная обратная задача, которая в на-

стоящее время активно изучается и может быть записана, например, в виде $y = Bx + h$, где B — матрица размывающего оператора, h — «зашумляющая» добавка.

Имеются подходы, основанные на «разделении» процедур устранения шума и процедур регуляризации. В этом случае необходимо теоретически обосновывать взаимодействие и взаимодополнение процедур устранения шума и процедур регуляризации.

Заметим, что зашумленность (в определенном смысле) вносит все перечисленные далее процедуры: постановка задачи, подготовка входных данных и проведение численных расчетов.

Поэтому полагаем очень интересным и перспективным предложение гибридных методов, сочетающих оптимизационную базу и обеспечивающих устранение шума на основе применения, например, нейронных сетей.

Задача с возмущенным ядром может иметь, как известно, не единственное решение и может быть неустойчивой к возмущениям правой части уравнения (1).

Классическая тихоновская регуляризация может приводить к сглаживанию тонкой структуры решения u для линейного операторного уравнения, рассматриваемого на паре линейных нормированных пространств U, F с разрывным, в общем случае, многозначным оператором A^{-1} и приближенной правой частью f .

Вычислительная практика решения интегральных уравнений первого рода убедительно показала, что применение в тихоновской регуляризации стабилизаторов в форме вариации различных типов позволяет значительно улучшить качество аппроксимации разрывных решений по сравнению с классической квадратичной регуляризацией, когда в качестве стабилизатора используется гильбертова норма L_2 или W_2^n [1].

Важным является и то, что в случае применения в качестве стабилизатора вариации функции удается обосновать кусочно-равномерную сходимость регуляризованных решений (на промежутках, не содержащих точек разрыва), что, вероятно, и объясняет преимущества такого рода регуляризирующих алгоритмов при восстановлении негладких решений.

Представляемый в данной работе алгоритм восстановления двумерного изображения является продолжением и развитием более ранних разработок [7–9].

Для обновленной конструкции разработанного регуляризирующего по Тихонову алгоритма предложен и апробирован новый двумерный стабилизатор, названный адаптивным в том смысле, что при конструировании стабилизатора используются текущие геометрические и яркостные характеристики сегментов, которые восстанавливаются в процессе итераций.

В основу алгоритма для вычисления граничных контуров сегментов изображения положена оценка значения скачка яркости в точках изображения.

Разработанный алгоритм в процессе итераций на каждом шаге использует уже имеющуюся информацию о геометрии приближенного изображения и восстанавливаемых сегментов приближенного изображения, а затем алгоритм эту информацию уточняет в процессе следующей итерации.

Для организации расчетов важную роль выполняет использование субградиентного процесса, который обеспечивает решение задачи недифференцируемой оптимизации, естественно возникающей в предлагаемом подходе, в связи с особенностями конструкции минимизируемого функционала. Субградиентный процесс включает и обеспечивает вычисление и уточнение на каждой итерации приближенных значений и решения u , и градиента решения ∇u .

Алгоритм отличается новизной разработанной процедуры итерационного воспроизве-

дения и уточнения сегментов восстанавливаемого изображения в процессе итераций.

Алгоритм обеспечивает возможность на заключительных этапах расчетов использовать простую эффективную процедуру вычисления контурных точек границ сегментов.

Методика, приведенная в данной статье, может быть использована для повышения качества цифровых изображений разного происхождения — технических, медицинских и др.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗАШУМЛЕННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ ФУНКЦИОНАЛА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

1.1. Двухэтапный метод аппроксимация негладких решений

Задача восстановления изображения, «размытого» аппаратной функцией регистрирующего прибора и «зашумленного» аддитивной помехой, сводится к решению двумерного интегрального уравнения первого рода (1). Известно, что для устойчивого восстановления гладких решений некорректных задач, формулируемых в виде линейного операторного уравнения $Au = f$, разработан арсенал средств на основе вариационных методов с привлечением стабилизаторов в форме нормы пространства Соболева или более общих стабилизирующих добавок. Однако при аппрокси-

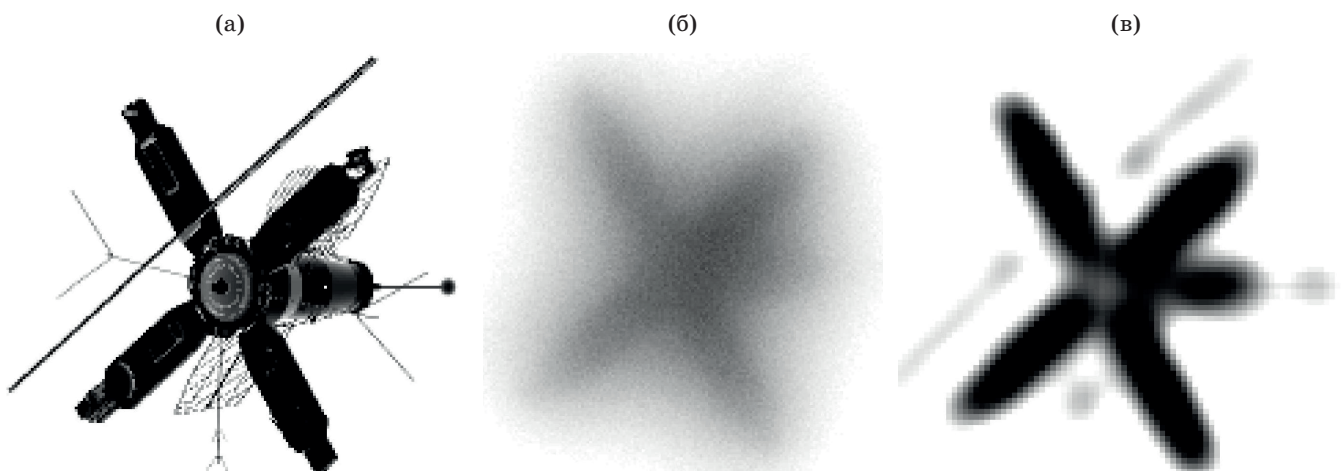


Рис. 1. Возможности алгоритма для восстановления изображения контуров основных частей спутника по заданному дефокусированному изображению. а — точное изображение спутника, б — изображение, наблюдаемое с помощью приборов, в — восстановленное изображение.

магии негладких (разрывных) решений, как правило, происходит «заглаживание» решения, поэтому в пространстве функций ограниченной полной вариации в соответствии с подходом [8] проводится тихоновская регуляризация задачи минимизации функционала вида

$$\min\{\|Au - f\|_{L_2}^2 + \alpha(\|u - u^0\|_{L_2}^2 + J(u)) : u \in U\}, \quad (2.1)$$

где u^0 — некоторое пробное решение, $J(u)$ — полная вариация функции u

$$J(u) = \sup \left\{ \int_D u(x) \operatorname{div} v(x) dx, \right. \\ \left. v \in C_0^1(D, R^2), |v(x)| \leq 1 \right\}. \quad (2.2)$$

Для вычисления приближенного решения задач (2.1), (2.2) применяется итерационный вариант субградиентного метода вида

$$u^{k+1} = u^k - \lambda h_k / \|h_k\|, \quad (2.3)$$

где h_k — субградиент целевого функционала Φ^α из выражений (2.1), (2.2).

На основе проведенных исследований и доказательств [8] построение минимизирующей последовательности для задачи (2.1)–(2.3) осуществляется из более гладких функций $u \in W_2^1(D)$ (а также на подмножестве $C^2(D)$ пространства $L_2(D)$). В этом случае для вычисления $J(u)$ применимы формулы

$$J(u) = \int_D |\nabla|u| dx, \quad \nabla u = \left(\sum_{i=1}^2 (\partial u / \partial x_i)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.4)$$

Для численной реализации алгоритма проводится дискретная аппроксимация регуляризованной задачи (2.1)–(2.4) в единичном квадрате D для равномерной сетки с шагом h по каждой переменной, т.е. вводится сеточный аналог R_n^2 пространств R^2 . Затем после некоторого преобразования экстремальная задача преобразуется к виду

$$\min \left\{ \sum_{k,l} \left[\sum_{i,j} h^2 K(y_k - t_i, y_l - s_j) u(t_i, s_j) - f_{k,l} \right]^2 h^2 + \right. \\ \left. + \alpha \sum_{i,j} h^2 \left[\left(\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} \right)^2 + \left(\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}. \quad (2.5)$$

Дискретный аналог субградиентного метода (2.3) принимает вид

$$u_n^{k+1} = u_n^k - \lambda_k \nabla \Phi_n^\alpha(u_n^k) / \|\nabla \Phi_n^\alpha(u_n^k)\|, \quad (2.6)$$

где $\nabla \Phi_n^\alpha(u_n^k)$ — произвольный субградиент целевой функции Φ_n^α из выражения (2.5) в точке u_n^k ,

$$\lambda_k = (\Phi_n^\alpha(u_n^k) - \Phi_n^*) / \|\nabla \Phi_n^\alpha(u_n^k)\|. \quad (2.7)$$

Затем дискретизированная задача (2.5) решается с помощью дискретизированного варианта субградиентного метода (2.6)–(2.7), а в качестве начального приближения используется дискретный аналог правой части f из интегрального уравнения (1).

Доказательство итерационной сходимости предложенного алгоритма по решению, функционалу и стабилизатору приведено в работе [8]. Для параметра α в расчетах полагалось $\alpha = 10^{-23}$. Результаты расчетов, приведенные на рис. 1в, продемонстрировали хорошие на тот момент времени возможности алгоритма восстановления изображения контуров основных частей спутника по заданному дефокусированному изображению (рис. 1б).

Замечание: описание алгоритма и результатов его работы [8] достаточно подробно приведены в данной работе, потому что предлагаемый новый алгоритм для восстановления двумерного изображения включает алгоритм из публикации [8] в качестве одной из составных частей, как это будет изложено и прокомментировано ниже в п. 3.

1.2. Конструкция и апробация прох-метода с использованием стабилизатора в виде нормы Липшица

Как показали численные эксперименты, выполненные выше для двумерных интегральных уравнений Фредгольма первого рода с негладкими (разрывными) решениями, было понятно, что при малых значениях параметра α не удастся восстановить, например, хорошо выраженный разрыв или излом у решения, с другой стороны, при относительно больших значениях α получается грубая аппроксимация точного решения.

Эти сложности в значительной степени удалось преодолеть сначала для одномерного случая [9] с помощью подключения прох-метода

для численного решения одномерного интегрального уравнения

$$Au \equiv \int_0^1 K(x, y)u(x)dx = f(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad (2.8)$$

где функции $K(x, y)$, $f(y)$ — непрерывны по своим переменным.

Для этого случая дискретный аналог регуляризованной задачи принимает вид

$$\min_{1 \leq i \leq N} \left\{ \max_{1 \leq j \leq N} \left| \sum_{j=1}^N hK(y_i, x_j)u_j - f_i \right| + \right. \\ \left. + \alpha \left[\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N h|u_j|^2 + \max_{1 \leq j \leq N} |u_j| + \max_{i \neq j} \frac{|u_i - u_j|}{|x_i - x_j|^\mu} \right] \times \right. \\ \left. \times \{u_j\}_1^N \in R^N \right\}. \quad (2.9)$$

Если в формуле (2.9) обозначить целевой функционал через Φ_n^α , то итерационный процесс для вычисления u можно записать (для дискретного случая) в виде

$$u^k = \operatorname{argmin} \left\{ \Phi_n^\alpha(u) + \beta \|u - u^{k-1}\|_{R_N}^2 \right\}; u \in R^N, \quad (2.10)$$

где Φ_n^α — целевая функция, $\beta = 0,5$.

Обоснование сходимости итераций приведено в работе [9].

Для выполнения численных экспериментов в одномерном случае было использовано численное восстановление трех модельных решений интегрального уравнения Фредгольма первого рода

$$Au \equiv \int_0^2 \frac{H}{H^2 + (x-y)^2} u(x)dx = f(y), \quad (2.11) \\ 0 < H \leq 2, \quad 0 \leq x, y \leq 2,$$

которое моделирует ситуацию, когда необходимо найти продолженное на глубину H гравитационное поле $u(x)$ по заданному на земной поверхности $f(y)$ (плоский случай).

Такого вида модельная задача была предложена давно [10], и решение такого типа задач до сих пор является актуальным и привле-

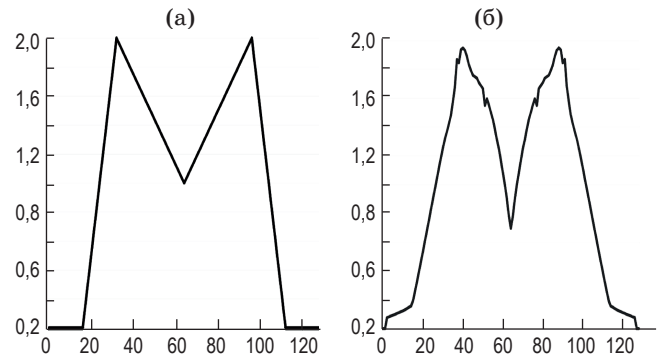


Рис. 2. Результаты расчетов по восстановлению одного из трех модельных решений для $\mu = 0,001$ и нулевого начального приближения. Графики точного (а) и приближенного (б) решений для возмущенной правой части. По оси абсцисс отложены номера $i = 0, 2, \dots, 128$ для узлов $x_i = (2/128)i$.

кает внимание исследователей по всему миру (например [11]).

На рис. 2 приведены результаты расчетов по восстановлению одного из трех модельных решений для $\mu = 0,001$ и нулевого начального приближения. В формуле для нормы Липшица полагалось $\mu = 0,001$, количество итераций для проведения расчетов назначалось равным 60. При расчете вариантов с точной правой частью для задания параметра регуляризации использовались $\alpha = 10^{-4}$, 10^{-5} , а для расчетов с возмущенной правой частью использовались $\alpha = 10^{-3}$, 10^{-4} . В расчетах использовалась $H = 1$, значение возмущения полагалось $\|f - f_\delta\| = \delta \leq 0,0108$.

Графики точного и восстановленного решений при возмущенных данных в одномерном случае приведены на рис. 2 для демонстрации качественного восстановления графика, имеющего сложный вариант восстанавливаемых изломов.

Замечание. Цель п. 1 — пояснить выбор конструкции двумерного адаптивного стабилизатора в п. 2 и показать возможности стабилизатора в одномерном случае.

2. КОНСТРУКЦИЯ И АПРОБАЦИЯ НОВОГО ДВУМЕРНОГО АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА ДЛЯ ВОССТАНОВЛЕНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЯ

Результаты, опубликованные в работах [7–9], помогли подготовить новый алгоритм, конструкция и результаты работы которого излагаются в данной работе далее, в п. 2 и 3.

Восстановление изображения, зашумленного аппаратной функцией регистрирующего прибора и аддитивной помехой, рассматривается в виде решения двумерного интегрального уравнения типа свертки

$$Au \equiv \int_0^1 \int_0^1 K(x-\xi, y-\eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y). \quad (3.1)$$

Пусть область интегрирования $\Pi = [0,1] \times [0,1]$ из (3.1) рассматривается в виде объединения $\Pi = \sum_{i=1}^m Q_i$, $i = 1, \dots, m$, где

1) Q_i — подобласть Π , ограниченная контуром $k_i = k_i(s)$, имеющим конечное число угловых точек, т.е. точек, являющихся точками разрыва первой производной (по длине дуги s для функции $k_i(s)$),

2) для точек, лежащих во внутренних точках контура подобласти Q_i , ограниченной контуром $k_i(s)$, полагается, что функция u «почти постоянная» — $u|_{Q_i} \approx b_i$ ($b_i \geq 0$), в точках, принадлежащих фону, полагается $u = 0$,

3) в точках контура $k_i(s)$ функция u имеет «скачок» или разрыв в направлении нормали к контуру $k_i(s)$.

Используя свойство аддитивности интеграла, для $\Pi = \sum_{i=1}^m Q_i$, $i = 1, \dots, m$ можно записать

$$\begin{aligned} \|Au - f\|_{L_2}^2 &\equiv \int_{\Pi} (Au - f)^2 dx_1 dx_2 = \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{Q_i} (Au - f)^2 dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Понятно, что на заданном изображении $f(x, y)$ в правой части из формулы (1) сегменты изображения могут быть «плохо различимыми», могут быть «невидимыми» (сливаться с фоном). Поэтому в начале расчетов (итерация с номером $k = 0$) полагается $\beta^0 \equiv 0$. В этом случае, фактически, работает алгоритм, представленный в работе [8], т.е. в этом случае работает алгоритм, содержащий только стабилизатор $J(u)$, и не содержащий прох-добавку.

Получается достаточно хорошее первое приближение ($k = 1$) к восстанавливаемому изображению (аналогичное по качеству изображению на рис. 1) с соответствующим набором под-областей Q_i^1 таких, что $\Pi = \sum_{i=1}^m Q_i$, $i = 1, \dots, m$.

Пусть k — номер итерации, $k \geq 2$, для задания функций $\beta^k(x, y)$ в области $\Pi = [0,1] \times [0,1]$ полагается

$$\begin{aligned} Au &\equiv \int_0^1 \int_0^1 K(x-\xi, y-\eta) u(\xi, \eta) d\xi d\eta = f(x, y), \\ \beta^k(x, y) &\equiv 0, \text{ если } (x, y) \in \Pi \setminus \sum_{i=1}^{m_k} Q_i^k, \\ k &= 1, 2, \dots, m_k \leq m. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Таким образом, $\sum_{i=1}^m Q_i$, объединение под-областей из Π , является по определению «носителем» для кусочно-постоянной функции $\beta^k(x, y)$.

Далее вводится по определению норма функции u в виде

$$\|u\|^2 = \int_{\Pi} \beta(x, y) u^2(x, y) dx dy. \quad (3.4)$$

Тогда можно записать

$$\|u - u^k\|^2 = \int_{\Pi} \beta^k(x, y) (u - u^k)^2 dx dy. \quad (3.5)$$

С учетом нормы, введенной в выражении (3.5), конструкция двумерного варианта прох-метода для расчета функции $u^{k+1}(x, y)$ записывается в виде

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \arg \min \left\{ \|Au - f\|_{L_2}^2 + \right. \\ &\left. + \Phi^\alpha(u) + 0,5 \|u - u^k\|^2 \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\Phi^\alpha = \alpha \left(\|u\|_{L_2}^2 + J(u) \right); u \in U, \quad (3.7)$$

(где $J(u)$ — полная вариация) и для практического применения этой конструкции обосновано использование формулы (2.4).

Для вычисления регуляризованного решения u^α в задаче (3.6)–(3.7) применяется вариант субградиентного метода

$$u^{k+1} = u^k - \lambda_k h_k / \|h_k\|, \quad h_k \in \partial \Phi^\alpha(u^k), \quad (3.8)$$

где h_k — субградиент целевого функционала Φ^α из выражений (3.6)–(3.7).

Затем для $\beta^{k+1}(x, y)$, вычисленного по формулам из (3.3), вычисляется $\|u - u^{k+1}\|$ из (3.5), затем из решения задачи (3.6) получается очередное приближение u^{k+2} к решению задачи (9). И так далее — до стабилизации приближения восстанавливаемой функции яркости u . Восстановление сегментов на изображении происходит автоматически, одновременно с восстановлением всего изображения в процессе цикла итераций.

Заметим, что после вычисления каждого приближения u^{k+1} , при желании, есть возможность перерасчета подобластей Q_i^{k+1} , $k \geq 1$, используя приемы, описание которых представлено в п. 3.

В результате численных экспериментов проверено, что для управления процессом бывает достаточно выбрать только самые «яркие» видимые подобласти. Например, оказалось достаточно выбрать одну подобласть — приближенный внутренний «треугольничек» (рис. 3), который первоначально «приближенно кон-

струируется» (например, с помощью задания трех вершин) по наблюдаемому изображению. Итерации следует проводить до стабилизации вычисляемых значений функции яркости u .

Проведенные модельные расчеты подтверждают хорошее качество восстановления изображения с помощью предлагаемого метода, как это видно из рис. 3.

3. АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ ГРАНИЧНЫХ КОНТУРОВ СЕГМЕНТОВ НА ИЗОБРАЖЕНИИ

Известно [16], что сегментация изображений, не являющихся тривиальными, представляет собой одну из самых сложных задач обработки изображений.

В литературе имеется точное определение понятия сегментации на основе использования предикатов для представления сегментации изображения как процесса разбиения изображения на составляющие подобласти

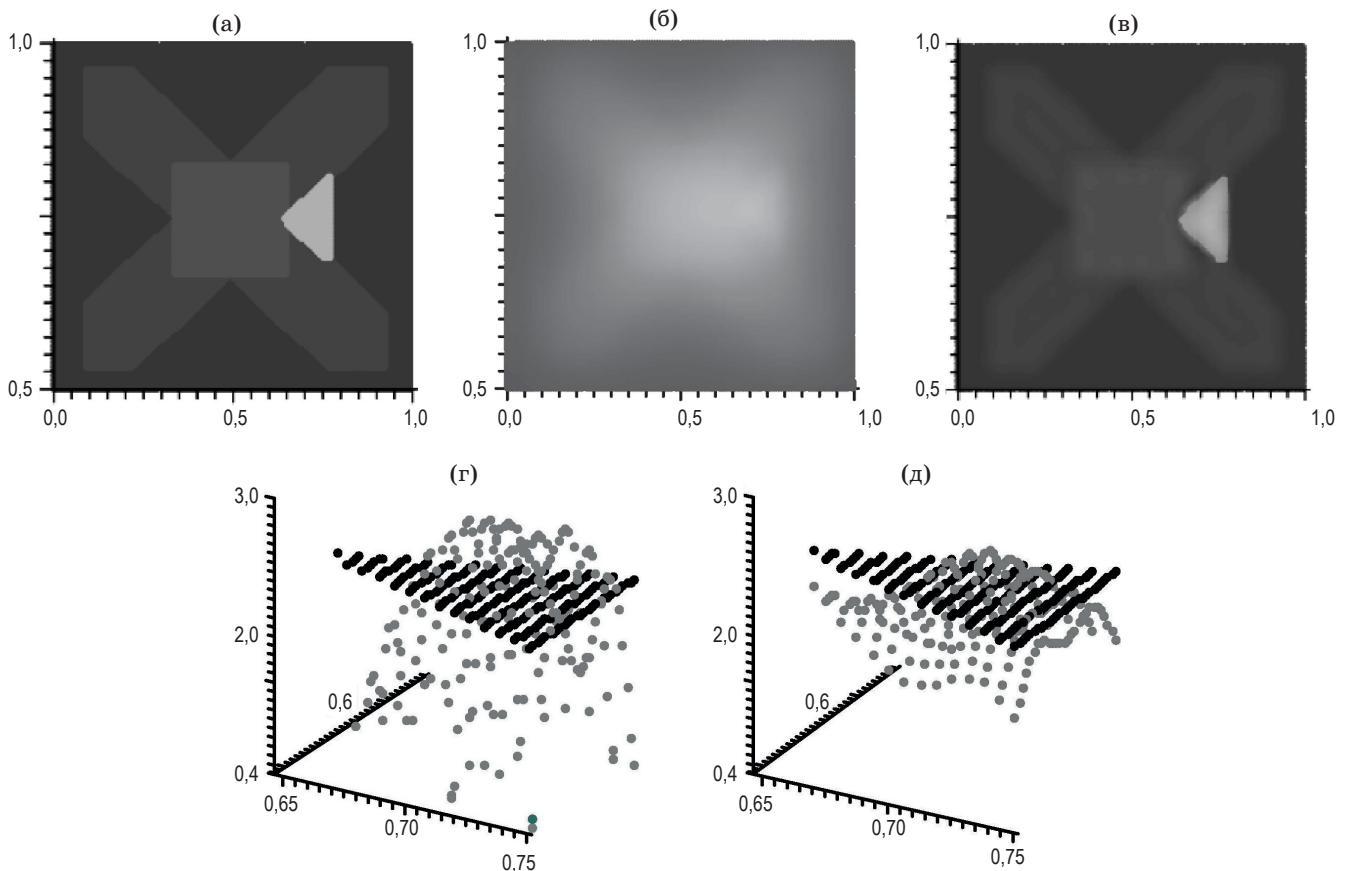


Рис. 3. Качество восстановления изображения с помощью предлагаемого метода. а — точное изображение, б — полученное прибором, в — восстановленное изображение, г — трехмерный сеточный фрагмент изображения, зарегистрированного прибором, д — трехмерный сеточный фрагмент восстановленного изображения.

со следующими пятью условиями: первое условие указывает, что разбиение должно быть полным, а второе — связным в определенном смысле, условие третье — области не пересекаются, четвертое — все пиксели в области имеют «примерно» одну и ту же яркость, пятое — две смежные области имеют заметно «разные» яркости.

Большинство алгоритмов сегментации изображений основываются на одном из двух базовых свойств сигнала яркости — разрывности или однородности. В первом случае подход состоит в разбиении изображения на основании резких изменений сигнала, таких как перепады яркости (например, вдоль некоторого направления график функции яркости $u(x, y)$ испытывает излом или разрыв).

Извлечение атрибутов изображения, в том числе контуров или сегментов, относится к методам высокого уровня среди методов обработки изображений. Преобладающий, в определенном смысле, подход состоит в восстановлении сегментов изображения на основе восстановления граничных контуров сегментов.

В книге [16] отмечается, что трудной и невыполнимой задачей были и остались постановка и выполнение одновременно трех целей

- обнаруженный контур должен быть как можно ближе к точному,
- хорошая локализация контурных точек,
- одиночный отклик на точку контура.

Известно, что широкое признание получил метод Кэнни, в котором сначала рассчитывается сеточная функция яркости u , затем по сеточным значениям функции u выполняется численное дифференцирование для получения сеточной функции ∇u . Затем в алгоритме Кэнни выполняется множество манипуляций, например, манипуляция подавления «некоторых» точек, «выбор» из нескольких полученных направлений вектора градиента и заключительная операция — подавление «ложных» контурных точек.

Отличительная особенность алгоритма, предлагаемого в данной работе, прежде всего характеризуется тем, что алгоритм осуществляет одновременное итерационное уточнение и функции яркости, и функции градиента яркости за счет особенностей конструкции субградиента минимизируемого функционала: формула субградиента включает в качестве аргументов функцию яркости $u(x, y)$ и функ-

цию градиента яркости ∇u [17]. Поэтому предлагаемый алгоритм на каждом шаге итераций осуществляет одновременное уточнение численных аппроксимаций функции яркости u и функции градиента ∇u (и функции модуля градиента). После стабилизации приближенных значений функций u и, одновременно, стабилизации ∇u завершаются итерационный процесс и работа основного алгоритма, описание которых представлены в разделе 3. Основной алгоритм далее не используется.

Осуществляется процедура построения графиков в графической системе MAPLE. Графики результатов расчетов по представленному основному методу приводятся на рис. 4.

Рисунок демонстрирует восстановление граничных контуров сегментов, на которых выполняется условие $c_1 < |\nabla u(x, y)| < c_2$. Из рис. 4д видно, что на контуре самого внешнего эллипса в направлении нормали восстановлено достоверное наличие двустороннего скачка значения функции $|\nabla u(x, y)| : c_1 < |\nabla u(x, y)| < c_2$ — для некоторых «усредненных» значений c_1, c_2 . Подходящие значения констант c_1, c_2 уточняются с помощью простого визуального подбора в системе MAPLE.

Аналогичные процедуры назначения констант c_1, c_2 выполняются для яркого круга и малого эллипса, находящегося на изображении ниже (под кругом).

Результаты выделения контуров представлены на двух изображениях (рис. 4д, е), которые демонстрируют восстановление граничных контуров сегментов, на которых выполняется условие $c_1 < |\nabla u| < c_2$, для контура на рис. 4д подобраны $c_1 = 0,006, c_2 = 0,010$, для контуров на рис. 4е — $c_1 = 0,001, c_2 = 0,002$.

Уточнение констант c_1, c_2 осуществлялось с помощью графических средств системы MAPLE и визуального наблюдения.

Исходя из геометрического смысла граничный контур области Q^N составляется из точек «скачков» значений модуля градиента $|\nabla u^N|$ для приближенного решения u^N на расчетной сетке, где N — номер последней выполненной итерации.

При этом важно, что для восстановления контуров сегментов y восстанавливаемого изображения основную информацию, функции $u^k(x, y)$ и $\nabla u^k(x, y)$ на каждой итерации доставляет сам алгоритм. В экспериментах

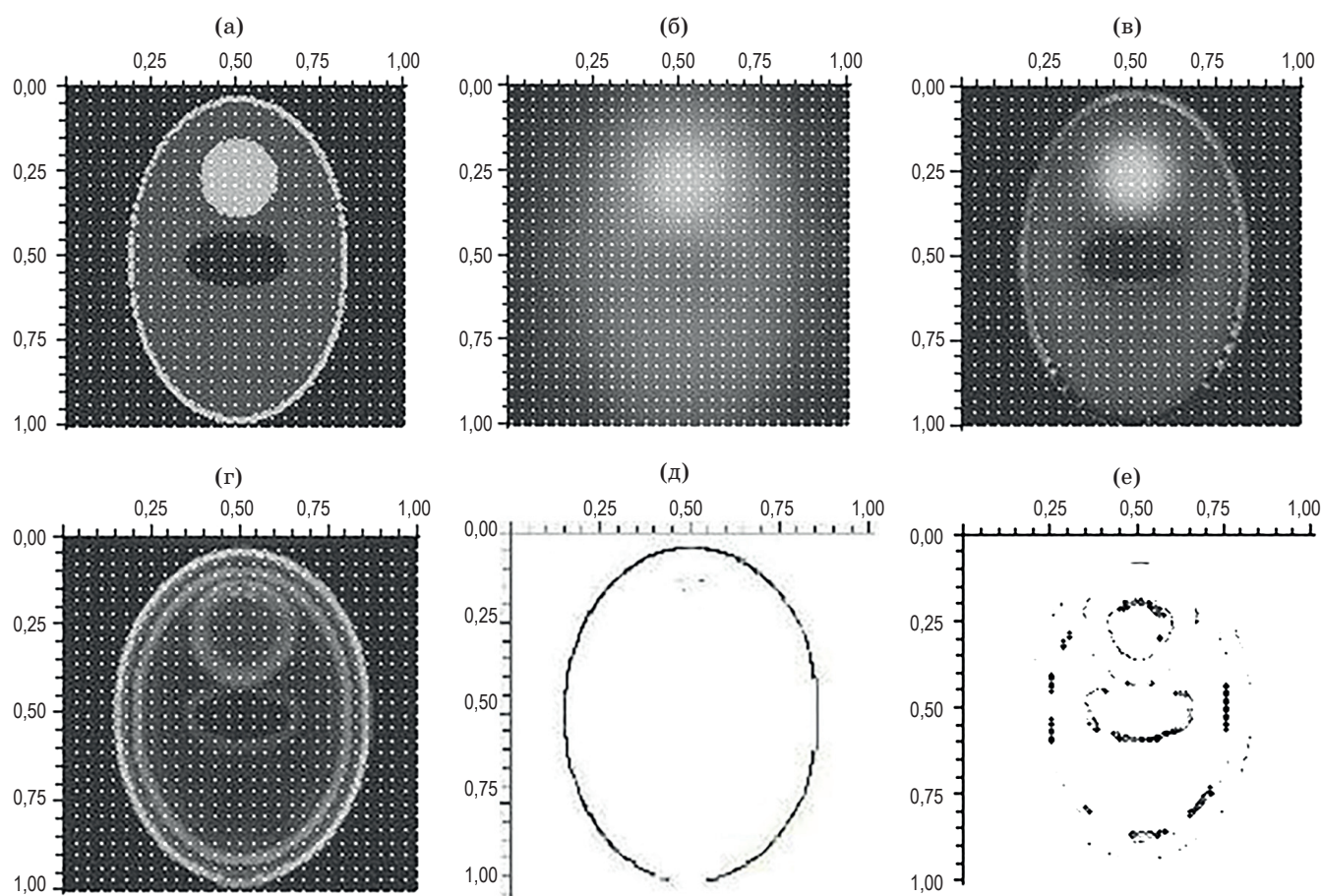


Рис. 4. Восстановление граничных контуров, на которых выполняется условие $c_1 < |u(x, y)| < c_2$. а — точное изображение, б — наблюдаемое изображение (исходный вид изображения для процедуры восстановления), в — восстановленная функция яркости u (восстановленное изображение), г — восстановленная функция ∇u , д — восстановление самого внешнего эллипса: $c_1 = 0,006$, $c_2 = 0,010$, е — восстановление контуров для подходящих значений: $c_1 = 0,001$, $c_2 = 0,002$.

конечный графический результат построения двух изображений на рис. 4д, е получен за два обращения в MAPLE. (Известно, например, что в настоящее время аналогичную работу «вручную» выполняет врач при анализе снимков желудочков сердца).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассматривается задача численного восстановления размытых изображений с помощью решения интегральных уравнений методом регуляризации Тихонова.

Разработанный и описанный в данной статье алгоритм решает специальные проблемы, так как упрощение проблемы выбора значения параметра регуляризации α , повышение качества восстановления и функции яркости,

и градиента функции яркости на изображениях, восстановление контуров сегментов на изображениях.

Методика данной статьи может быть использована для повышения качества цифровых изображений разного происхождения — технических, медицинских.

Автор искренне благодарит члена-корреспондента РАН В.В. Васина за постановку задачи и проведение основополагающих теоретических разработок, а также автор выражает благодарность доктору физ.-мат. наук А.Л. Агееву за внимательное прочтение работы и полезные замечания. Очень большое значение для выполнения работы имеют замечания и рекомендации профессора В.С. Сизикова и постоянное изучение литературы, автором которых является профессор.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Леонов А.С.* Решение некорректно поставленных обратных задач: очерк теории, практические алгоритмы и демонстрации в МАТЛАБ. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. 336 с.
2. *Сизиков В.С.* Прямые и обратные задачи восстановления изображений, спектроскопии и томографии с MatLab. Уч. пособие. СПб: изд. «Лань», 2017. 412 с.
3. *Сизиков В.С., Степанов А.В., Меженин А.В., Бурлов Д.И., Экземпляров Р.А.* Определение параметров искажений изображений спектральным способом в задаче обработки снимков поверхности Земли, полученных со спутников и самолётов // Оптический журнал. 2018. Т. 85. № 4. С. 19–27.
4. *Сизиков В.С.* Спектральный способ оценки функции рассеивания точки в задаче устранения искажений изображений // Оптический журнал. 2017. Т. 84. № 2. С. 36–44.
5. *Сизиков В.С.* Оценка функции рассеивания точки по спектру искаженного томографического изображения // Оптический журнал. 2015. Т. 82. № 10. С. 13–17.
6. *Klann Esther, Ramlau Ronny, Sun Peng.* A Mumford — Shah-type approach to simultaneous reconstruction and segmentation for emission tomography problems with Poisson statistics // J. Inverse and Ill-posed Problems. 2017. V. 25. № 4. P. 521–542.
7. *Васин В.В., Агеев А.Л.* Некорректные задачи с априорной информацией. Екатеринбург: УИФ Наука, 1993.
8. *Васин В.В., Серезникова Т.И.* Двухэтапный метод аппроксимации негладких решений и восстановление зашумленного изображения // Автоматика и телемеханика. 2004. № 2. С. 126–135.
9. *Васин В.В., Серезникова Т.И.* Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15. С. 15–23.
10. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. М.: Наука, 1980. 288 с.
11. *Huang J., Donatelli M., Chan R.* Nonstationary iterated thresholding algorithms for image deblurring // Inverse Problems and Imaging. 2013. V. 7. № 3. P. 717–736.
12. *Агеев А.Л., Антонова Т.В., Серезникова Т.И.* Регулярные методы локализации особенностей по зашумленным данным // Междунар. науч. конф. «Математика в современном мире». Тез. докл. Новосибирск: изд. Института математики, 2017. С. 286.
13. *Серезникова Т.И.* Разработка адаптивного стабилизатора для восстановления размытых и зашумленных изображений // Междунар. науч. конф. «Современные проблемы математической физики и вычислительной математики». Тез. докл. М., 2016. С. 178.
14. *Серезникова Т.И.* О регулярном алгоритме восстановления негладких решений интегральных уравнений Фредгольма первого рода // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. Науч.-техн. сб. 2010. Вып. 4. С. 71–78.
15. *Серезникова Т.И.* О развитии алгоритма восстановления размытых изображений // Всерос. конф. «Алгоритмический анализ некорректных задач». Челябинск, 2014.
16. *Гонсалес Р., Вудс Р.* Цифровая обработка изображений. М.: «Техносфера», 2012. 1072 с.
17. *Коннов И.В.* Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. Казань: изд. Казанского ун-та, 2013. 508 с.