

DOI: 10.17586/1023-5086-2024-91-07-13-24

УДК 621.373:535

# Изменения спектра и структуры поляритонных мод лазера класса С под действием распределенной обратной связи волн

Владимир Владиленович Кочаровский<sup>1</sup>, Алексей Викторович Мишин<sup>2✉</sup>,  
Екатерина Рудольфовна Кочаровская<sup>3</sup>

Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук,  
Нижний Новгород, Россия

<sup>1</sup>kochar@ipfran.ru <https://orcid.org/0000-0002-0487-4931>

<sup>2</sup>mishin@ipfran.ru <https://orcid.org/0000-0001-6206-6249>

<sup>3</sup>katya@ipfran.ru <https://orcid.org/0000-0002-1945-2520>

## Аннотация

**Предмет исследования.** Характеристическое и дисперсионное уравнения мод лазера класса С и спектр этих мод. **Цель работы.** Определение зависимостей структуры поля, частот и волновых чисел мод от параметров лазера. **Метод.** Численное моделирование характеристического и дисперсионного уравнений лазера класса С, аналитические оценки в ряде частных случаев. **Основные результаты.** Проведен анализ структуры, частот и инкрементов/декрементов поляритонных мод в зависимости от коэффициента распределенной обратной связи встречных волн и уровня инверсии населенностей, создаваемого накачкой, для типичных параметров сверхизлучающего лазера с открытым комбинированным резонатором Фабри–Перо с распределенной обратной связью встречных волн, в котором время жизни фотонов меньше или порядка времени фазовой релаксации оптических дипольных колебаний активных центров. Показано, что изменение коэффициента распределенной обратной связи встречных волн позволяет эффективно управлять спектром поляритонных мод лазера, в частности, осуществлять генерацию на частотах внутри определяемой ей запрещенной фотонной зоны, из которой электромагнитные моды вытеснены. **Практическая значимость.** Полученные в работе результаты показывают, как изменение ряда параметров лазера отражается на спектре его мод, что необходимо для выявления возможностей управления лазерной генерацией.

**Ключевые слова:** поляритонные моды, низкодобротный комбинированный резонатор, сверхизлучающий лазер, распределенная обратная связь, спектр мод, запрещенная фотонная зона

**Благодарность:** работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания ИПФ РАН № FFUF-2023-0002.

**Ссылка для цитирования:** Кочаровский Вл.В., Мишин А.В., Кочаровская Е.Р. Изменения спектра и структуры поляритонных мод лазера класса С под действием распределенной обратной связи волн // Оптический журнал. 2024. Т. 91. № 7. С. 13–24. <http://doi.org/10.17586/1023-5086-2024-91-07-13-24>

Коды OCIS: 140.3430, 140.6630, 030.1670

# Changes in the spectrum and structure of polariton modes of a class C laser under the action of distributed feedback of waves

VLADIMIR V. KOCHAROVSKY<sup>1</sup>, ALEKSEI V. MISHIN<sup>2</sup>✉, EKATERINA R. KOCHAROVSKAYA<sup>3</sup>

A.V. Gaponov-Grekhov Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences, Nizhny Novgorod, Russia

<sup>1</sup>kochar@ipfran.ru <https://orcid.org/0000-0002-0487-4931>

<sup>2</sup>mishin@ipfran.ru <https://orcid.org/0000-0001-6206-6249>

<sup>3</sup>katya@ipfran.ru <https://orcid.org/0000-0002-1945-2520>

## Abstract

**Subject of study.** Characteristic and dispersion equations of modes of a class C laser as well as a spectrum of these modes. **Aim of study.** Determine how the field structure, frequencies and wave-numbers of modes depend on laser parameters. **Method.** Numerical modeling of the characteristic and dispersion equations of a class C laser, analytical estimates in a number of special cases. **Main results.** The structure, frequencies and growth/decay rates of polariton modes are analyzed depending on the distributed-feedback coefficient of counterpropagating waves and the level of population inversion created by pumping for typical parameters of a superradiant laser with an open combined Fabry–Perot cavity with the distributed-feedback coefficient of counterpropagating waves, in which the photon lifetimes are less than or on the order of the phase relaxation time of optical dipole oscillations of active centers. It is shown that changing the value of the distributed feedback of counterpropagating waves makes it possible to effectively control the spectrum of polariton modes of the laser, in particular, to achieve lasing at frequencies inside the photonic bandgap defined by it, from which electromagnetic modes are displaced. **Practical significance.** The results obtained in this work show how a change in a number of laser parameters affects the spectrum of modes, which is required to control laser generation.

**Keywords:** polariton modes, low-Q combined cavity, superradiant laser, distributed feedback, mode spectrum, photonic bandgap

**Acknowledgment:** the work was carried out with financial support from the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of the state assignment of the Institute of Applied Physics of the RAS № FFUF-2023-0002.

**For citation:** Kocharovsky V.I., Mishin A.V., Kocharovskaya E.R. Changes in the spectrum and structure of polariton modes of a class C laser under the action of distributed feedback of waves [in Russian] // Opticheskii Zhurnal. 2024. V. 91. № 7. P. 13–24. <http://doi.org/10.17586/1023-5086-2024-91-07-13-24>

**OCIS codes:** 140.3430, 140.6630, 030.1670

## ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что история лазеров насчитывает более 60 лет (а мазеров — около 70), физические исследования подобных систем продолжают, прежде всего, в целях реализации новых режимов работы лазеров и благодаря реализации или работам по созданию новых активных сред, усиливающих электромагнитное излучение различных диапазонов частот [1–13]. Создаются среды со все большими дипольными моментами  $d$  на частоте  $\omega_0$  лазерного перехода, большими объемной  $N_0$  и спектральной плотностями активных центров,

большим временем  $T_2$  фазовой релаксации оптических дипольных колебаний. В результате становятся возможной лазерная генерация и актуальным ее исследование для низкодобротных (открытых) резонаторов, в которых время жизни фотонов  $T_E$  порядка или меньше указанного времени  $T_2$  некогерентной релаксации поляризации активной среды. Эти лазеры, относящиеся к классу C согласно принятой терминологии [13, 14], допускают одно- и многомодовую сверхизлучательную генерацию [13, 15, 16] как стационарную (с предельно узкой шириной спектра поряд-

ка  $T_2^{-1}$ ), так и импульсно-периодическую или квазистохастическую (с предельно короткими когерентными импульсами излучения).

В подобных условиях лазерная генерация осуществляется на поляритонных модах, в которых ведущую роль играют парциальные колебания поляризации активной среды [13, 15–18], в отличие от электромагнитных мод, которые определяются парциальными колебаниями поля в резонаторе и задействованы в генерации обычных лазеров классов А и В. В настоящей работе на основе известных линейаризованных уравнений Максвелла–Блоха [13, 14] проведен качественный анализ структуры и спектра поляритонных мод, а также возможности управления их параметрами в комбинированном резонаторе Фабри–Перо (ФП) с распределенной обратной связью (РОС) встречных волн. Особое внимание уделено наличию и свойствам этих мод в запрещенной фотонной зоне частот, из которой электромагнитные моды в данном резонаторе вытесняются, а следовательно, не могут обеспечить там лазерную генерацию. При этом исходными являются дисперсионное и характеристическое уравнения, представленные, например, в обзоре [13] в рамках модели двухуровневого лазера с однородной непрерывной накачкой.

Цель настоящей работы — определение зависимостей структуры поля, частот и волновых чисел мод от параметров лазера.

План статьи следующий. В разделе 1 приведены уравнения для спектра мод. В разделе 2 напоминаются известные свойства поляритонных мод лазера с резонатором ФП в отсутствие РОС. Раздел 3 посвящен волновым числам и пространственной структуре мод в комбинированном резонаторе ФП–РОС. В разделе 4 изложены типичные спектральные свойства мод в лазере с таким резонатором и прослежено их изменение с увеличением коэффициента РОС. Раздел 5 содержит анализ частот и инкрементов мод в зависимости от уровня накачки. В разделе 6 сделаны выводы и указаны некоторые открытые вопросы.

## 1. ДИСПЕРСИОННОЕ И ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГОРЯЧИХ МОД

Уравнения для спектра мод лазера с произвольными параметрами комбинированного

резонатора ФП–РОС и двухуровневой активной среды при однородной инверсии населенностей ее энергетических уровней имеют вид [13]

$$\frac{R_1\beta^* + R_2\beta}{1 + R_1R_2} + \sqrt{\kappa^2 + |\beta|^2} + \kappa \frac{(1 - R_1R_2)1 + \exp(2i\kappa L)}{(1 + R_1R_2)1 - \exp(2i\kappa L)} = 0, \quad (1)$$

$$\kappa^2 + |\beta|^2 = \left( \Omega_s + i\Sigma_0 + \frac{n_p}{\Omega_s + \Phi + i\Gamma_2} \right)^2, \quad (2)$$

причем моды являются суперпозицией встречных волн поля и поляризации (с безразмерными амплитудами  $a_{\pm} = A_{\pm}/2\pi dN_0$  и  $p_{\pm} = P_{\pm}/dN_0$ ), каждая из которых содержит пару компонент (их амплитуды помечены одним и двумя штрихами)

$$\begin{aligned} a_{\pm} &= (A'_{\pm} \exp(i\kappa\zeta) + A''_{\pm} \exp(-i\kappa\zeta)) \exp(-i\Omega_s\tau), \\ p_{\pm} &= (P'_{\pm} \exp(i\kappa\zeta) + P''_{\pm} \exp(-i\kappa\zeta)) \exp(-i\Omega_s\tau). \end{aligned} \quad (3)$$

Выше  $\kappa$  — отстройка комплексного волнового числа моды от резонансного волнового числа РОС  $k_0$  (задаваемого брэгговской структурой резонатора, ведущей к перерассеянию встречных волн, например, на полуволновой модуляции диэлектрической проницаемости матрицы активной среды  $\varepsilon = \varepsilon_0 \text{Re}[1 + 4\beta_0 \exp(2ik_0z)]$  с периодом  $\pi/k_0$  и средней проницаемостью  $\varepsilon_0$ ),  $\Omega_s$  — отстройка комплексной частоты моды от частоты брэгговского резонанса  $\omega_0 = ck_0/\varepsilon_0^{1/2}$ ,  $\tau = t\omega_c$  — время, нормированное на кооперативную частоту  $\omega_c = (2\pi d^2 N_0/\varepsilon_0 \hbar)^{1/2}$ ,  $\zeta = z/B_c$  — координата, нормированная на кооперативную длину  $B_c = c/(\omega_c \varepsilon_0^{1/2})$ ,  $\Sigma_0 = 2\pi\Sigma/(\varepsilon_0\omega_c)$  — омические потери,  $\Gamma_{E,2} = 1/(\omega_c T_{E,2})$  — парциальные скорости релаксации поля в резонаторе и поляризации активной среды,  $n_p$  — инверсия населенностей уровней активных центров ( $-1 \leq n_p \leq 1$ ),  $\beta = \beta_0\omega_0/\omega_c$  — нормированный коэффициент РОС встречных волн,  $\Phi$  — нормированная на кооперативную частоту отстройка частоты центра спектральной линии активной среды от частоты брэгговского резонанса.

Граничные условия на торцах лазера, дающие характеристическое уравнение, в рассма-

триваемом случае одинаковых противоположных зеркал ФП с коэффициентами отражения  $R_1 = R_2 = R \leq 1$ , имеют вид

$$\begin{aligned} a_+(\tau, 0) &= Ra_-(\tau, 0), \\ Ra_+(\tau, L) &= a_-(\tau, L), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $L = B/B_c$  — длина лазера, нормированная на кооперативную длину. Все расчеты ниже приведены для длины  $L = 4$  и параметра  $\Gamma_2 = 1/8$ . Даже в резонаторе с отличающимися противоположными зеркалами характеристическое уравнение (1) обладает симметрией по отношению к замене  $\kappa \rightarrow -\kappa$ . Поэтому для определенности будем выбирать решение с отрицательным знаком мнимой части  $\kappa$ . В то же время дисперсионное уравнение (2) можно записать иначе, опустив знак квадрата в правой части и введя в левой части знак квадратного корня из присутствующей там комплексной величины, свойственной комбинированным резонаторам (СВ),

$$\kappa_{\text{СВ}} = \sqrt{\kappa^2 + |\beta|^2} \quad (5)$$

(имея в виду оба значения двузначной функции «корень квадратный»).

Ниже ограничимся случаем действительных коэффициентов РОС ( $\text{Im } \beta = 0$ ) и отражения зеркал ( $\text{Im } R = 0$ ), отвечающим показательному, максимально асимметричному поведению волновых чисел (см. раздел 3). Для определенности будем также считать, что частота центра спектральной линии активной среды настроена на парциальную частоту выбранной моды резонатора ФП и совпадает с частотой брэгговского резонанса ( $\Phi = 0$ ). Для указанных так называемых «горячих» мод условимся действительную часть комплексной отстройки частоты  $\Omega_s$  называть просто частотой и обозначать  $\Omega$ , а мнимую — инкрементом/декрементом (в зависимости от знака) и обозначать  $\Gamma$ .

Согласно характеристическому и дисперсионному уравнениям (1), (2) влияние длины лазера на спектр мод является двояким. С одной стороны, она влияет на излучательные потери в резонаторе, а следовательно, на инкременты мод. С другой стороны, именно от нее зависит частота заполнения поляритонных и электромагнитных дисперсионных кривых дискретными точками, отвечающими отдельным модам лазера (см. следующий раздел).

## 2. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ ПОЛЯРИТОННЫХ МОД РЕЗОНАТОРА ФАБРИ–ПЕРО

Для лазера с чистым резонатором Фабри–Перо, т.е. при нулевом коэффициенте РОС  $\beta = 0$ , закон дисперсии (2) имеет вид

$$\kappa = \Omega_s + i\Sigma_0 + \frac{n_p}{\Omega_s + i\Gamma_2}, \quad (6)$$

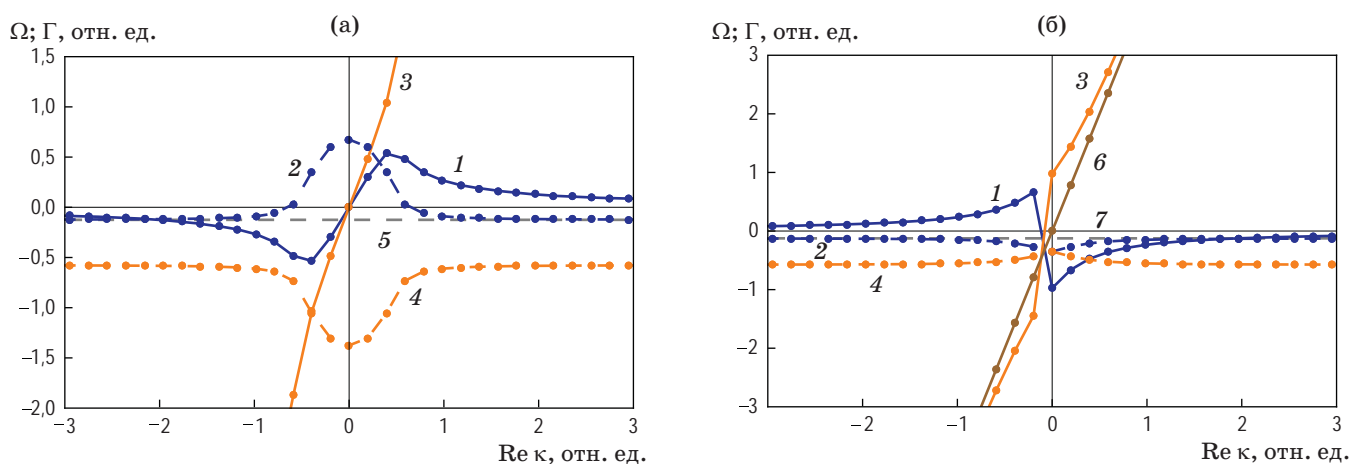
а характеристическое уравнение (1) отвечает двум вырожденным встречным волнам с эквидистантным спектром действительных волновых чисел ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) и постоянным значением их мнимой части, определяемой скоростью излучательных потерь через зеркало  $\Gamma_{\text{ФП}} = -(\ln R)/L$ ,

$$\kappa_{\text{ФП}} = \frac{\pi n}{L} + i \frac{\ln R}{L}. \quad (7)$$

Из уравнения (6) ясно, что излучательные потери суммируются с омическими  $\Sigma_0$ , и поэтому последние для простоты всюду ниже не учитываются. В результате для лазера с резонатором ФП имеем следующее точное решение в виде дискретных, согласно формуле (7), поляритонных и электромагнитных мод (знаки  $\pm$  подчеркивают необходимость учета обоих значений квадратного корня)

$$\Omega_{\text{сФП}} = \frac{-i\Gamma_2 + \kappa_{\text{ФП}}}{2} \pm \sqrt{(i\Gamma_2 + \kappa_{\text{ФП}})^2 - 4n_p}. \quad (8)$$

В случае неинвертированной среды ( $n_p = -1$ , рис. 1б) спектр мод является стандартным поляритонным с разрывом поляритонной и электромагнитной ветвей (отвечающим щели, равной удвоенной кооперативной частоте) в центре спектра, причем все моды обладают декрементами (затухают) [17, 18]. В случае инвертированной среды ( $n_p > 0$ , рис. 1а) спектр мод имеет нестандартный поляритонный вид с пересекающимися поляритонной и электромагнитной ветвями, причем при  $\Gamma_2 < \Gamma_{\text{ФП}}$  инкрементами обладают именно поляритонные моды (они обеспечивают сверхизлучательную генерацию лазера при слабой релаксации поляризации, когда  $\Gamma_2 < 1$ ) [6, 13–17]. В этом случае их инкременты и частоты ограничены значением кооперативной частоты:  $|\Omega_{\text{сФП}}| < 1$ . Порог генерации для центральной поляритонной



**Рис. 1.** Дисперсионные зависимости «горячих» мод лазера с инвертированной ( $n_p = 1$ ) (а) и неинвертированной ( $n_p = -1$ ) (б) активной средой, помещенной в резонатор Фабри–Перо с коэффициентом отражения зеркал 0,1. Сдвиги частот и инкременты/декременты поляритонных мод обозначены точками на кривых 1 и 2, электромагнитных — точками на кривых 3 и 4. Прямая 5 отмечает уровень  $-\Gamma_2$ . Для сравнения, на панели (б) кривая 6 демонстрирует дисперсионную зависимость «холодных» мод резонатора Фабри–Перо (при нулевой инверсии населенностей,  $n_p = 0$ ), прямая 7 отмечает уровень  $-\Gamma_{FP}$

**Fig. 1.** Dispersion curves of “hot” laser modes with (a) inverted ( $n_p = 1$ ) and (б) non-inverted ( $n_p = -1$ ) active medium placed in a Fabry–Perot cavity with mirror reflection factor 0.1. The frequency shifts and growth/decay rates of polariton modes are shown by points on curves 1 and 2, electromagnetic modes – by points on curves 3 and 4. Line 5 marks the  $-\Gamma_2$  level. For comparison, in panel (б) curve 6 shows the dispersion of the “cold” modes of the Fabry–Perot cavity (at zero population inversion,  $n_p = 0$ ), line 7 marks the  $-\Gamma_{FP}$  level

моды определяется условием  $n_p = -\Gamma_2(\ln R)/L$  и достигается по мере роста уровня накачки, длины лазера и коэффициента отражения его зеркал. На рис. 1б изображены также «холодные» электромагнитные моды резонатора ФП,  $\Omega_{sFP} = \kappa_{FP}$ , рассчитанные при нулевой инверсии населенностей, т.е. без учета взаимодействия поля со средой.

### 3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТРУКТУРА МОД КОМБИНИРОВАННОГО РЕЗОНАТОРА

В комбинированном резонаторе решение вида (8) дисперсионного уравнения (2) для комплексной отстройки частоты  $\Omega_{sFP}$  формально тоже справедливо, если вместо волновой отстройки (7)  $\kappa_{FP}$  подставить комплексный квадратный корень (5). Последний непосредственно учитывает наличие запрещенной фотонной зоны в виде слагаемого  $|\beta|^2$ , но включает комплексную отстройку волнового числа  $k$ , которая должна находиться из трансцендентного характеристического уравнения (1), т.е. явно неизвестна и в отличие от результата (7) имеет разную мнимую часть для мод с различными номерами. Поэтому спектр даже «холодных»

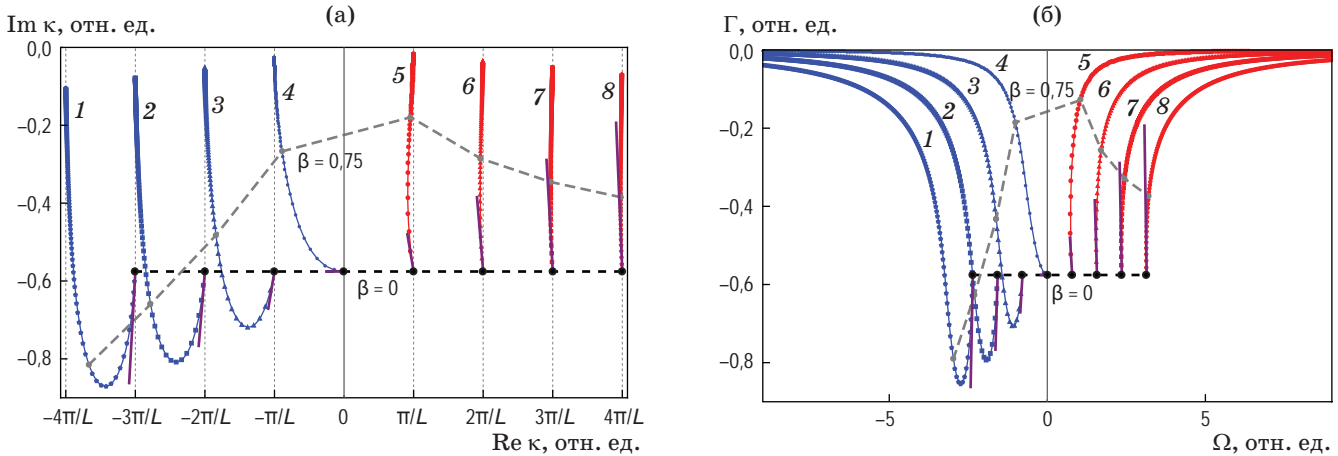
электромагнитных мод комбинированного резонатора  $\Omega_{sFP} = \kappa_{sFP}$  является нетривиальным (см. рис. 2).

Согласно представленной на рис. 2а типичной зависимости комплексных отстроек волновых чисел мод  $k$  от коэффициента РОС  $\beta$ , их отрицательные мнимые части для различных мод могут быть как значительно больше, так и значительно меньше отрицательной мнимой части  $\Gamma_{FP}$  отстройки (7) для чистого резонатора ФП при  $\beta = 0$ . Аналогичное поведение комплексных отстроек частот мод  $\Omega_s$  на рис. 2б показывает, как с ростом коэффициента РОС уменьшается значение их отрицательной мнимой части вследствие повышения добротности резонатора и одновременно происходит постепенное вытеснение действительных частот мод из центральной области спектра благодаря расширению запрещенной фотонной зоны  $|\Omega_s| \leq \beta$ . Оно начинает сказываться для мод с разными номерами при различных значениях величины  $\beta L$  порядка или больше единицы [13, 19–21]. Так, на рис. 2б уже при  $\beta = 0,75$ , когда  $\beta L = 3$ , действительные частоты двух центральных мод на краю запрещенной фотонной зоны отличаются примерно

на две кооперативных частоты, тогда как в резонаторе ФП при  $\beta = 0$  их отличие меньше кооперативной частоты.

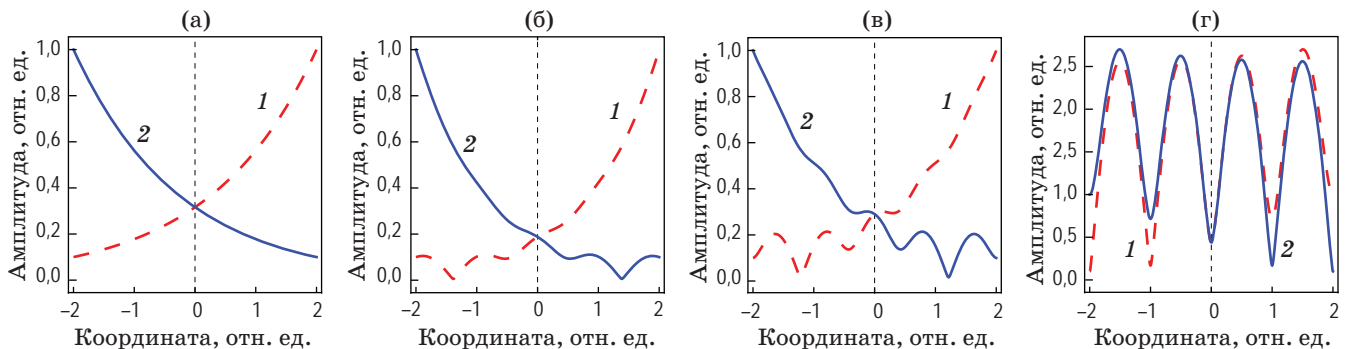
Отметим, что комплексные отстройки волновых чисел «горячих» поляритонных и электро-

магнитных мод и их пространственная структура (3) не зависят от параметров среды и накачки, а определяются лишь параметрами резонатора  $\beta$ ,  $R$ ,  $L$ , наследуя свойства «холодных» мод. Ограниченный объем статьи не позволяет



**Рис. 2.** Отображение (годограф) последовательностей комплексных отстроек волновых чисел  $k$  (а) и комплексных отстроек частот  $\Omega_s$  (б) электромагнитных мод, найденных при нулевой инверсии населенностей для эквидистантной последовательности значений коэффициента РОС с шагом 0,05 в интервале (0, 9). Изображены по четыре наиболее добротные моды в левой (кривые 1–4) и правой (кривые 5–8) частях спектра. Пунктиром соединены точки, отвечающие отстройкам различных мод при  $\beta = 0,375$ . Прямыми обозначены приближенные решения (10). Коэффициент отражения зеркал 0,1

**Fig. 2.** Mapping (hodograph) of (a) the sequences of the wavenumbers complex shifts and (b) complex shifts of electromagnetic modes frequencies found at zero population inversion for an equidistant sequence of values of the distributed-feedback coefficient  $\beta$  with a step of 0.05 in an interval (0, 9). The four highest quality modes in the (curves 1–4) left and (curves 5–8) right parts of the spectrum are depicted. The dotted line connects the points corresponding to the shifts of various modes at  $\beta = 0.375$ . Straight lines indicate approximate solutions (10). Mirror reflection factor 0.1



**Рис. 3.** Структуры полей одной из мод «горячего» комбинированного резонатора ФП ( $n_p = 1$ ) при различных значениях коэффициента РОС:  $\beta = 0$  — резонатор ФП (а),  $\beta = 0,55$  (б) и  $\beta = 1,25$  (в) — низкодобротные резонаторы ФП-РОС,  $\beta = 9$  — высокодобротный резонатор ФП-РОС (г). Кривая 1 соответствует волне, бегущей вправо, а 2 — влево

**Fig. 3.** Field structures constituting one of the modes of the “hot” combined Fabry–Perot cavity ( $n_p = 1$ ) for different values of the distributed-feedback coefficient: (a)  $\beta = 0$  is a Fabry–Perot cavity, (б)  $\beta = 0.55$  and (в)  $\beta = 1.25$  are the low-Q Fabry–Perot distributed feedback cavities, (г)  $\beta = 9$  is a high-Q Fabry–Perot distributed feedback cavity. Curve 1 corresponds to a wave traveling to the right, and curve 2 — to the left

детально остановиться на выявленных особенностях нетривиальной перестройки и изменения асимметрии спектра мод с ростом коэффициента РОС. Эти особенности определяются функциями  $\kappa(\beta)$ ,  $\Omega_s(\beta)$  и обусловлены эффектами интерференции четырех гармонических компонент структуры мод (3), которую в общем случае можно указать явно:

$$\begin{aligned} a_+(\zeta) &= \exp(i\kappa\zeta) + \\ &+ \frac{\beta - R(\kappa_{CB} + \kappa)}{R(\kappa_{CB} - \kappa) - \beta} \exp(-i\kappa(\zeta + L)), \\ a_-(\zeta) &= \frac{\beta}{\kappa_{CB} - \kappa} \times \\ &\times \left( \exp(i\kappa\zeta) + \frac{(\kappa_{CB} - \kappa) - \beta R}{\beta R - (\kappa_{CB} + \kappa)} \exp(-i\kappa(\zeta + L)) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Структура поля мод во многом задается мнимой частью отстройки волнового числа, существенно зависящей от коэффициента РОС  $\beta$  (рис. 2а). Даже при небольшом увеличении последнего такая зависимость может обуславливать прижатие поля к торцам лазера. На рис. 3б это продемонстрировано для одной из мод левой части спектра (рис. 2) при значении  $\beta = 0,55$ , отвечающем самой отрицательной мнимой части  $\text{Im } \kappa$ . При дальнейшем увеличении коэффициента РОС в структуре поля все заметнее осцилляции (см. рис. 3в, построенный при значении  $\beta = 1,25$ , отвечающем возвращению указанной мнимой части к ее значению в резонаторе ФП (7),  $\text{Im } \kappa = -\Gamma_{FP}$ ). Достаточно большое дальнейшее увеличение коэффициента РОС для любой выбранной моды увеличивает амплитуду осцилляций поля и выравнивает ее значение вдоль резонатора, так как указанная мнимая часть отстройки волнового числа стремится к нулю и мода становится высокочастотной (см. рис. 3г при  $\beta = 9$ ).

#### 4. ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРА МОД ОТ КОЭФФИЦИЕНТА РАСПРЕДЕЛЕННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ КОМБИНИРОВАННОГО РЕЗОНАТОРА ПРИ НАЛИЧИИ СИЛЬНО ИНВЕРТИРОВАННОЙ АКТИВНОЙ СРЕДЫ

Таким образом, установив зависимость  $\kappa(\beta)$ , можно найти вид комплексных отстроек частот всех мод как функций коэффициента РОС  $\Omega_s(\beta)$ . Типичный пример для лазера с рассматриваемыми параметрами при максималь-

ной инверсии населенностей представлен на рис. 4, где, как и в общем случае сверхизлучающих лазеров с комбинированным резонатором ФП-РОС, наибольший инкремент достигается для центральных поляритонных мод, способных обеспечить генерацию на частотах внутри запрещенной фотонной зоны. Здесь нас интересуют лазеры класса С с достаточно низкочастотными резонаторами, для которых параметр  $\beta L$  еще не превышает многократно единицу, т.е. коэффициент РОС еще довольно мал, но все же достаточен для значительного изменения действительных частот и инкрементов нескольких центральных поляритонных мод, т.е. для управления спектром лазерной генерации при не слишком большом расширении запрещенной фотонной зоны.

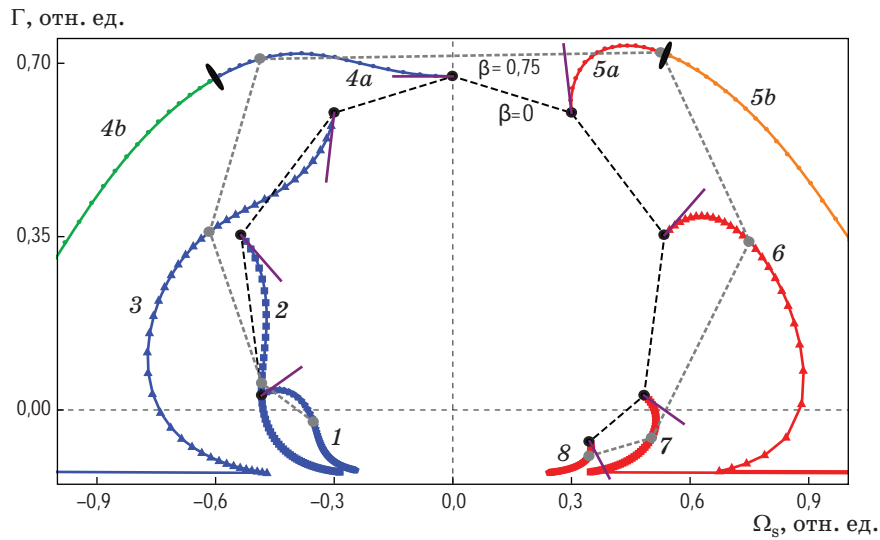
Для того же примера сказанное демонстрирует рис. 5. На нем для двух центральных мод отмечены также значения  $\beta$ , при которых равны времена жизни фотона и релаксации поляризации активной среды, так что поляритонные моды переименовываются в электромагнитные при больших значениях  $\beta$ .

Для малых значений коэффициента РОС, опираясь на линейное приближение, нетрудно определить асимптотическое поведение поправок к комплексным отстройкам волновых чисел и частот мод, беря в качестве исходных значения соответствующих отстроек для резонатора ФП (7), (8),

$$\begin{aligned} \kappa_A &= \frac{R(1 - \cosh[2 \ln R])}{(1 - R^2)(i\pi n - \ln R)} \beta, \\ \Omega_{SA} &= \frac{R[1 - \cosh(2 \ln R)]}{\left( iL(1 - R^2) \left( 1 - \frac{n_p}{(\Omega_{SFP} + i\Gamma_2)^2} \right) \times \right.} \beta. \end{aligned} \quad (10)$$

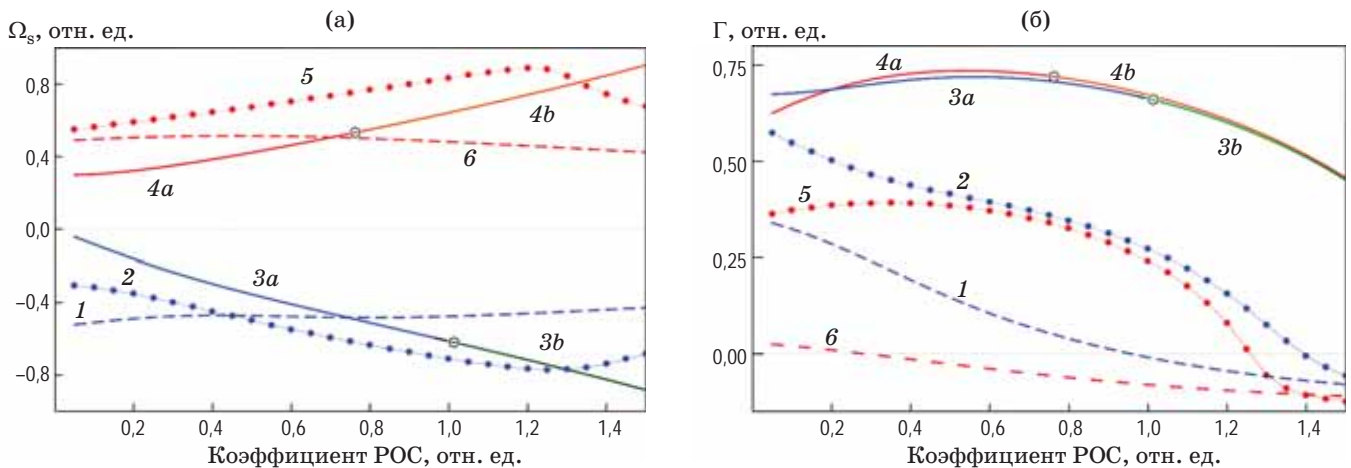
$$\left. \times \left( \Omega_{SFP} + \frac{n_p}{\Omega_{SFP} + i\Gamma_2} \right) \right)$$

Данные асимптотики хорошо согласуются с численными расчетами для мод с различными номерами  $n$  и позволяют, в частности, выяснить при каких значениях коэффициента отражения зеркал с его увеличением происходит симметризация отстроек  $\kappa(\beta)$  и  $\Omega_s(\beta)$  для центральных мод с малыми номерами  $n$  при фиксированном небольшом значении коэффициента РОС.



**Рис. 4.** Отображение (годограф) последовательностей комплексных отстроек частот  $\Omega_s$  электромагнитных (участки кривых  $4b$  и  $5b$ ) и поляритонных (кривые  $1-3$ ,  $4a$ ,  $5a$ ,  $6-8$ ) мод, найденных при максимальной инверсии населенностей ( $n_p = 1$ ) для эквидистантной последовательности значений коэффициента РОС с шагом  $0,05$  в интервале  $(0, 9)$ . Изображены по четыре наиболее добротные моды в левой ( $1-4$ ) и правой ( $5-8$ ) частях спектра. Пунктиром соединены точки, отвечающие отстройкам различных мод при  $\beta = 0$  и  $\beta = 0,375$ . Прямыми обозначены приближенные решения (10). Коэффициент отражения зеркал  $0,1$

**Fig. 4.** Mapping (hodograph) of sequences of the complex frequency shifts of (sections of curves  $4b$  and  $5b$ ) electromagnetic and (curves  $1-3$ ,  $4a$ ,  $5a$ ,  $6-8$ ) polariton modes found at maximum population inversion ( $n_p = 1$ ) for an equidistant sequence of values of the distributed-feedback coefficient  $\beta$  with a step of  $0.05$  in an interval  $(0, 9)$ . The four highest quality modes in the left ( $1-4$ ) and right ( $5-8$ ) parts of the spectrum are depicted. The dotted lines connect the points corresponding to the shifts of various modes at  $\beta = 0$  and  $\beta = 0.375$ . Straight lines indicate approximate solutions (10). Mirror reflection factor  $0.1$



**Рис. 5.** Зависимости частот  $\Omega_s$  (а) и инкрементов  $\Gamma$  (б) электромагнитных (участки кривых  $3b$  и  $4b$ ) и поляритонных ( $1, 2, 3a, 4a, 5, 6$ ) мод от коэффициента РОС. Изображены по три наиболее добротные моды в левой ( $1-3$ ) и правой ( $4-6$ ) частях спектра, отвечающие тем же модам на рис. 4. Пустыми кружками отмечены точки, где  $T_E \approx T_2$  и кривая  $3a$  переходит в кривую  $3b$  при  $\beta \approx 1,01$ , а кривая  $4a$  переходит в кривую  $4b$  при  $\beta \approx 0,76$ . Коэффициент отражения зеркал  $0,1$ , уровень инверсии населенностей  $n_p = 1$

**Fig. 5.** Dependences of (a) frequencies  $\Omega_s$  and (b) growth/decay rates  $\Gamma$  of (sections of curves  $3b$  and  $4b$ ) electromagnetic and ( $1, 2, 3a, 4a, 5, 6$ ) polariton modes on the value of the distributed-feedback coefficient. Empty circles mark the points where  $T_E \approx T_2$  and curve  $3a$  goes into curve  $3b$  at  $\beta \approx 1.01$ , and curve  $4a$  goes into curve  $4b$  at  $\beta \approx 0.76$ . Three highest quality modes are depicted in the ( $1-3$ ) left and ( $4-6$ ) right parts of the spectrum, similar to the same modes in Fig. 4. Mirror reflection factor  $0.1$ , population inversion level  $n_p = 1$

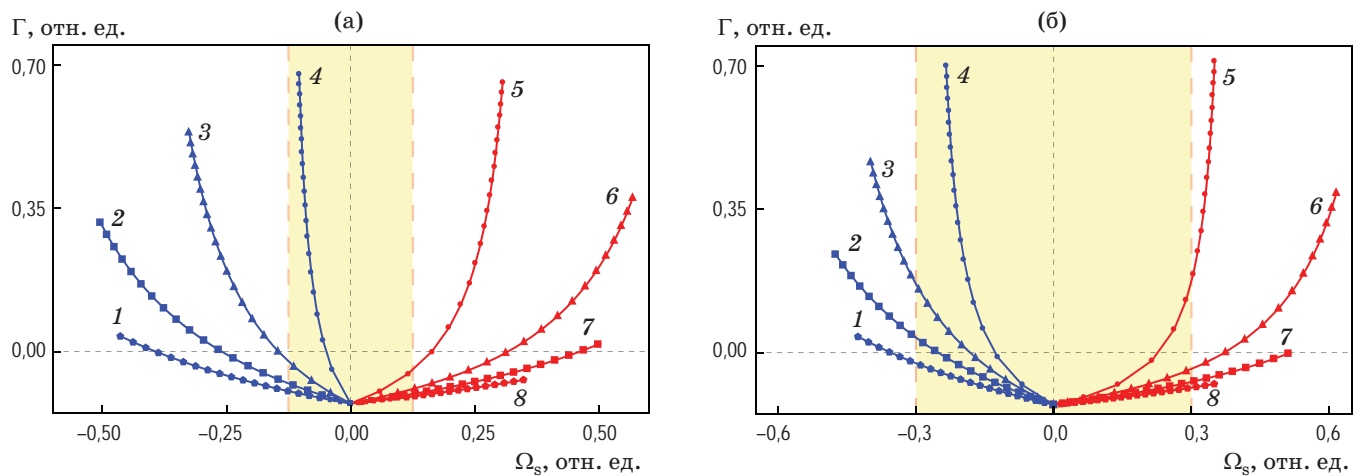
Заметим, что при больших значениях  $\beta$ , когда комбинированный резонатор фактически становится высокодобротным брэгговским за счет сильной РОС, а электромагнитное поле не может существовать на частотах в области запрещенной фотонной зоны, все поляритонные моды внутри нее приобретают декремент, близкий к скорости некогерентной релаксации поляризации  $\Gamma_2$ .

### 5. ЗАВИСИМОСТЬ СПЕКТРА МОД ОТ УРОВНЯ НАКАЧКИ ЛАЗЕРА С КОМБИНИРОВАННЫМ РЕЗОНАТОРОМ

Наряду со значением коэффициента РОС уровень инверсии населенностей активной среды  $n_p$  также существенно влияет на комплексные отстройки частоты интересующих нас поляритонных мод. Указанное обстоятельство продемонстрировано на рис. 6, из которого ясно, что с ростом  $n_p$  у нескольких центральных

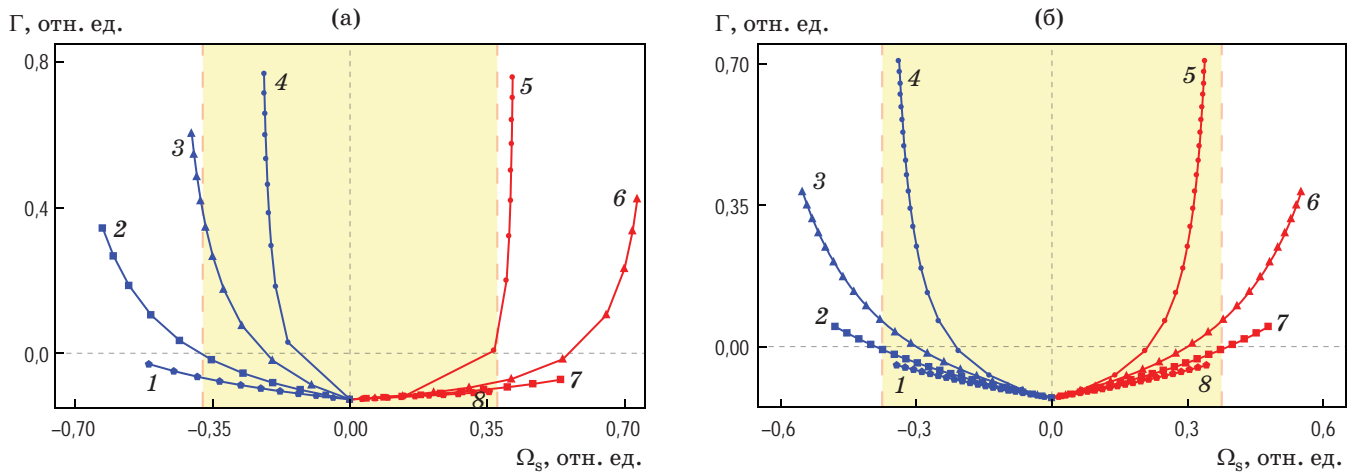
поляритонных мод сначала сильнее меняются действительные частоты, а потом — инкременты. При этом изменение коэффициента РОС в 2,4 раза (ср. рис. 6а, б) заметно увеличивает ширину запрещенной фотонной зоны и число неустойчивых мод в ней, существенно сказывается на разностях действительных частот нескольких центральных мод и довольно слабо на их инкрементах/декрементах.

В свою очередь, сопоставление рис. 7а и 7б показывает, что наличие зеркал, пусть не сильно отражающих, существенно для управления генерацией поляритонных мод, поскольку, несмотря на довольно высокую парциальную добротность чисто брэгговского резонатора с  $R = 0$  (или с очень малым значением  $R$ ) в нем значительно заметнее вытеснение (увеличение частотной отстройки) поляритонных мод из окрестности спектральной линии активной среды и связанное с этим подавление их инкремента по сравнению с комбинированным



**Рис. 6.** Отображения (годографы) последовательностей комплексных отстроек частот  $\Omega_s$  поляритонных мод, найденных при значениях коэффициента РОС 0,125 (а) и 0,3 (б) для эквидистантной последовательности значений инверсии населенностей  $n_p$  с шагом 0,05 в интервале (0, 1). Изображены по четыре наиболее добротные моды в левой (1–4) и правой (5–8) частях спектра со следующими парциальными временами жизни фотона в единицах обратной кооперативной частоты:  $T_{E(1)} = 1,55$ ,  $T_{E(2)} = 1,49$ ,  $T_{E(3)} = 1,47$ ,  $T_{E(4)} = 1,84$ ,  $T_{E(5)} = 2,24$ ,  $T_{E(6)} = 2,01$ ,  $T_{E(7)} = 1,92$ ,  $T_{E(8)} = 1,88$  — (а),  $T_{E(1)} = 1,40$ ,  $T_{E(2)} = 1,34$ ,  $T_{E(3)} = 1,47$ ,  $T_{E(4)} = 2,41$ ,  $T_{E(5)} = 3,41$ ,  $T_{E(6)} = 2,53$ ,  $T_{E(7)} = 2,28$ ,  $T_{E(8)} = 2,16$  — (б). Область внутри запрещенной фотонной зоны ограничена вертикальными пунктирными линиями. Коэффициент отражения зеркал 0,1

**Fig. 6.** Mapping (hodographs) of sequences of the complex shifts of frequencies of polariton modes found at values of the distributed-feedback coefficient (a) 0.125 and (b) 0.3 for an equidistant sequence of population inversion values  $n_p$  with a step of 0.05 in an interval (0, 1). The four highest quality modes in the (1–4) left and (5–8) right parts of the spectrum with the following partial photon lifetimes in units of inverse cooperative frequency are depicted: (a)  $T_{E(1)} = 1.55$ ,  $T_{E(2)} = 1.49$ ,  $T_{E(3)} = 1.47$ ,  $T_{E(4)} = 1.84$ ,  $T_{E(5)} = 2.24$ ,  $T_{E(6)} = 2.01$ ,  $T_{E(7)} = 1.92$ ,  $T_{E(8)} = 1.88$ ; (b)  $T_{E(1)} = 1.40$ ,  $T_{E(2)} = 1.34$ ,  $T_{E(3)} = 1.47$ ,  $T_{E(4)} = 2.41$ ,  $T_{E(5)} = 3.41$ ,  $T_{E(6)} = 2.53$ ,  $T_{E(7)} = 2.28$ ,  $T_{E(8)} = 2.16$ . The region inside the photonic bandgap is marked by vertical dotted lines. Mirror reflection factor 0.1



**Рис. 7.** Отображения (годографы) последовательностей комплексных отстроек частот  $\Omega_s$  поляритонных мод, найденных при значениях коэффициента отражения зеркал 0,28 (а) и 0 (б) для эквидистантной последовательности значений инверсии населенностей  $n_p$  с шагом 0,05 в интервале (0, 1). Изображены по четыре наиболее добротные моды в левой (1–4) и правой (5–8) частях спектра со следующими парциальными временами жизни фотона в единицах обратной кооперативной частоты:  $T_{E(1)} = 2,58$ ,  $T_{E(2)} = 2,39$ ,  $T_{E(3)} = 2,24$ ,  $T_{E(4)} = 2,58$ ,  $T_{E(5)} = 5,95$ ,  $T_{E(6)} = 4,29$ ,  $T_{E(7)} = 3,86$ ,  $T_{E(8)} = 3,66$  — (а),  $T_{E(1)} = 1,42$ ,  $T_{E(2)} = 1,59$ ,  $T_{E(3)} = 1,92$ ,  $T_{E(4)} = 3,11$ ,  $T_{E(5)} = 3,11$ ,  $T_{E(6)} = 1,92$ ,  $T_{E(7)} = 1,59$ ,  $T_{E(8)} = 1,42$  — (б). Область внутри запрещенной фотонной зоны ограничена вертикальными пунктирными линиями. Коэффициент РОС 0,375

**Fig. 7.** Mapping (hodographs) of sequences of the complex shifts of frequencies of polariton modes found at values of the mirror reflection factor (a) 0.28 and (b) 0 for an equidistant sequence of population inversion values  $n_p$  with a step of 0.05 in an interval (0, 1). The four highest quality modes in the (1–4) left and (5–8) right parts of the spectrum with the following partial photon lifetimes in units of inverse cooperative frequency are depicted: (a)  $T_{E(1)} = 2.58$ ,  $T_{E(2)} = 2.39$ ,  $T_{E(3)} = 2.24$ ,  $T_{E(4)} = 2.58$ ,  $T_{E(5)} = 5.95$ ,  $T_{E(6)} = 4.29$ ,  $T_{E(7)} = 3.86$ ,  $T_{E(8)} = 3.66$ ; (b)  $T_{E(1)} = 1.42$ ,  $T_{E(2)} = 1.59$ ,  $T_{E(3)} = 1.92$ ,  $T_{E(4)} = 3.11$ ,  $T_{E(5)} = 3.11$ ,  $T_{E(6)} = 1.92$ ,  $T_{E(7)} = 1.59$ ,  $T_{E(8)} = 1.42$ . The region inside the photonic bandgap is marked by vertical dotted lines. Distributed-feedback coefficient 0.375

резонатором при том же коэффициенте РОС, но с конечным, хотя и весьма умеренным коэффициентом отражения зеркал 0,28.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, в работе продемонстрированы типичные свойства поляритонных мод в зависимости от коэффициента РОС и накачки лазера с комбинированным низкодобротным резонатором. Именно эти моды существенны для генерации такого лазера, особенно в его запрещенной фотонной зоне, из которой обычно рассматриваемые электромагнитные моды вытеснены, и ширина которой пропорциональна коэффициенту РОС. Среди полученных результатов отметим следующие, которые важны для выяснения порога одно- и многомодовой генерации в сверхизлучающих лазерах, оценки числа участвующих в ней мод, анализа спектра ла-

зерной автомодуляции как внутри, так и вне запрещенной фотонной зоны, а также других вопросов динамики лазеров класса С.

1. В запрещенной фотонной зоне лазера с комбинированным резонатором могут существовать поляритонные моды, обладающие значительными инкрементами и обеспечивающие сверхизлучательную генерацию.

2. Увеличение коэффициента РОС в комбинированном резонаторе с заданным коэффициентом отражения зеркал приводит к увеличению не только ширины запрещенной фотонной зоны, но и количества поляритонных мод в ней, хотя для сверхизлучающего лазера обычно слабо сказывается на их инкрементах и сильнее на их частотах.

3. Рост коэффициента отражения зеркал торцов лазера с комбинированным резонатором значительно увеличивает инкремент поляритонных мод, особенно центральных,

и в меньшей степени влияет на количество поляритонных мод внутри запрещенной фотонной зоны и на их частоты.

4. С увеличением уровня накачки (инверсии населенностей активной среды) у поляритонных мод сначала сильнее меняется частота (до порога генерации), а потом — их инкремент (после порога генерации).

Данная краткая работа, основанная на частном случае комбинированного резонатора, далеко не исчерпывает широкий круг проблем спектра мод в лазерах класса С. Изученные нами свойства поляритонных мод и возможности управления их спектром для более широкого класса комбинированных резонаторов ФП-РОС с большим набором управляющих параметров будут изложены в других работах. Так, представляют интерес структура и спектральные свойства мод лазера со сверхизлучающей активной средой для различных несимметричных резонаторов с отличающимися коэффициентами отражения противоположных зеркал Фабри–Перо. Важной характеристикой спектра и инкрементов мод, в том числе в от-

ношении устойчивости и воспроизводимости их генерации для различных образцов одной и той же активной среды, является влияние отстройки центра спектральной линии активной среды от частоты брэгговского резонанса (т.е. центра запрещенной фотонной зоны РОС) и от парциальной частоты выделенной моды резонатора Фабри–Перо. Не менее важны и установленные зависимости спектральных свойств мод и порогов их генерации от фазы брэгговской модуляции (т.е. положения полуволновой решетки, обеспечивающей РОС, относительно центра резонатора) и от фазы комплексных коэффициентов отражения зеркал Фабри–Перо, допускающей регулировку для слоистых диэлектрических зеркал. Наконец, при исследовании возможностей лазеров класса С для различных указанных случаев полезным является общий сравнительный анализ эффективности управления спектром генерации мод за счет изменения как указанных отстроек и фаз, так и параметра РОС (амплитуды брэгговской модуляции), коэффициентов отражения зеркал и уровня непрерывной накачки.

#### СПИСОК ИСТОЧНИКОВ

1. Wu J., Ghosh S., Su R., et al. Nonlinear parametric scattering of exciton polaritons in perovskite microcavities // *Nano Lett.* 2021. V. 21. № 7. P. 3120–3126. <https://doi.org/10.1021/acs.nanolett.1c00283>
2. Engelhardt G., Cao J. Monolithic generators of pseudo-nondiffracting optical vortex beams at the microscale // *Phys. Rev. B.* 2022. V. 105. № 6. P. 064205. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.105.064205>
3. Schneider C., Rahimi-Iman A., Kim N., et al. An electrically pumped polariton laser // *Nature.* 2013. V. 497. P. 348–352. <https://doi.org/10.1038/nature12036>
4. Zhang L., Hu J., Wu J., et al. Recent developments on polariton lasers // *Progress in Quantum Electronics.* 2022. V. 83. P. 100399. <https://doi.org/10.1016/j.pquantelec.2022.100399>
5. Котова Л.В., Savvidis P.G., Besombes L. и др. Поляритонные моды в цилиндрическом микрорезонаторе в режим поляритонного лазера // *ФТТ.* 2021. Т. 63. № 5. С. 610–615. <https://doi.org/10.21883/ФТТ.2021.05.50809.001>  
Kotova L.V., Savvidis P.G., Besombes L., et al. Polariton modes in a cylindrical microcavity in the polariton lasing regime // *Phys. Solid State.* 2021. V. 63. № 5. P. 722–727. <https://doi.org/10.1134/S1063783421050103>
6. Scheibner M., Schmidt T., Worschech L., et al. Superradiance of quantum dots // *Nature Phys.* 2007. V. 3. P. 106–110. <https://doi.org/10.1038/nphys494>
7. Jho Y.D., Wang X., Reitze D.H., et al. Cooperative recombination of electron-hole pairs in semiconductor quantum wells under quantizing magnetic fields // *Phys. Rev. B.* 2010. V. 81. № 15. P. 155314. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.81.155314>
8. Cong K., Zhang Q., Wang Y., et al. Dicke superradiance in solids [Invited] // *JOSA B.* 2016. V. 33. № 7. P. C80–C101. <https://doi.org/10.1364/JOSAB.33.000C80>
9. Vukovic N., Radovanovic J., Milanovic V., et al. Analytical expression for Risken-Nummedal-Graham-Haken instability threshold in quantum cascade lasers // *Opt. Exp.* 2016. V. 24. № 23. P. 26911–26929. <https://doi.org/10.1364/OE.24.026911>
10. Zhang W., Brown E.R., Mingardi A., et al. THz superradiance from a GaAs:ErAs quantum dot array at room temperature // *Appl. Sci.* 2019. V. 9. № 15. P. 3014. <https://doi.org/10.3390/app9153014>
11. Paik E.Y., Zhang L., Burg G.W., et al. Interlayer exciton laser of extended spatial coherence in atomically thin heterostructures // *Nature.* 2019. V. 576. P. 80–84. <https://doi.org/10.1038/s41586-019-1779-x>
12. Pozina G., Kaliteevski M.A., Nikitina E.V., et al. Nonlinear behavior of the emission in the periodic structure of InAs monolayers embedded in a GaAs matrix: Nonlinear behavior of the emission from periodic InAs monolayers // *Phys. Status Solidi B.* 2016. V. 254. P. 1600402. <https://doi.org/10.1002/pssb.201600402>
13. Кочаровский В.В., Железняков В.В., Кочаровская Е.Р. и др. Сверхизлучение: принципы генерации и реализация в лазерах // *УФН.* 2017. Т. 187. № 4. С. 367–410. <https://doi.org/10.3367/UFNr.2017.03.038098>  
Kocharovskiy V.V., Zheleznyakov V.V., Kocharovskaya E.R., et al. Superradiance: The principles of generation and implementation in lasers // *Phys. Usp.* 2017. V. 60. № 4. P. 345–384. <https://doi.org/10.3367/UFNe.2017.03.038098>

14. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. М.: Физматлит, 1999. 368 с.  
Khanin Ya.I. Fundamentals of laser dynamics. North Holland, 2012. 407 p.
15. Кочаровский В.В., Кукушкин В.А., Тарасов С.В. и др. Асимметричная генерация в сверхизлучающем лазере с симметричным низкодобротным резонатором // ФТП. 2019. Т. 53. № 10. С. 1321–1328. <https://doi.org/10.21883/FTR.2019.10.48284.30>  
Kocharovskiy V.V., Kukushkin V.A., Tarasov S.V., et al. On the asymmetric generation of a superradiant laser with a symmetric low-q cavity // Semiconductors. 2019. V. 53. P. 1287–1294. <https://doi.org/10.1134/S1063782619100105>
16. Кочаровская Е.Р., Мишин А.В., Кочаровский В.В. и др. Поляритонный резонанс в автомодуляции асимметричного состояния сверхизлучающего лазера // ФТП. 2022. Т. 56. № 7. С. 651–658. <https://doi.org/10.21883/FTR.2022.07.52755.10>  
Kocharovskaya E.R., Mishin A.V., Kocharovskiy V.V., et al. Polariton resonance in a self-modulation of an asymmetric steady-state of a superradiant laser [in Russian] // FTR. 2022. V. 56 № 7. P. 651–658. <https://doi.org/10.21883/FTR.2022.07.52755.10>
17. Железняков В.В., Кочаровский В.В., Кочаровский В.В. Волны поляризации и сверхизлучение в активных средах // УФН. 1989. Т. 159. № 2. С. 193–260. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0159.198910a.0193>  
Zheleznyakov V.V., Kocharovskiy V.V., Kocharovskiy V.V. Polarization waves and super-radiance in active media // Sov. Phys. Usp. 1989. V. 32. № 4. P. 835–870. <https://doi.org/10.1070/PU1989v032n10ABEH002764>
18. Kavokin A., Malpuech G. Cavity polaritons. Academic Press, 2003. 246 p.
19. Лукьянов В.Н., Семенов А.Т., Шелков Н.В. и др. Лазеры с распределенной обратной связью (обзор) // Квант. электрон. 1975. Т. 2. № 11. С. 2373–2398. <https://doi.org/10.1070/QE1975v005n11ABEH012115>  
Luk'yanov V.N., Semenov A.T., Shelkov N.V., et al. Lasers with distributed feedback (review) // Sov. J. Quantum Electron. 1975. V. 5. № 11. P. 1293–1307. <https://doi.org/10.1070/QE1975v005n11ABEH012115>
20. Akiba S. Encyclopedic handbook of integrated optics: Distributed feedback lasers. Boca Raton: CRC Press, 2006. 11 p.
21. Ивченко Е.Л., Поддубный А.Н. Резонансная дифракция электромагнитных волн на твердом теле (обзор) // ФТТ. 2013. Т. 55. № 5. С. 833–849.  
Ivchenko E.L., Poddubny A.N. Resonant diffraction of electromagnetic waves from solids (a review) // Phys. Solid State. 2013. V. 55. № 5. P. 905–923. <http://dx.doi.org/10.1134/S1063783413050120>

#### АВТОРЫ

**Владимир Владиленович Кочаровский** — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий отделом, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 603950, Россия; Scopus ID: 57193021664; <https://orcid.org/0000-0002-0487-4931>; [kochar@ipfran.ru](mailto:kochar@ipfran.ru)

**Алексей Викторович Мишин** — кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 603950, Россия; Scopus ID: 57219982602; <https://orcid.org/0000-0001-6206-6249>; [mishin@ipfran.ru](mailto:mishin@ipfran.ru)

**Екатерина Рудольфовна Кочаровская** — кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 603950, Россия; Scopus ID: 7801399829; <https://orcid.org/0000-0002-1945-2520>; [katya@ipfran.ru](mailto:katya@ipfran.ru)

Статья поступила в редакцию 13.11.2023  
Одобрена после рецензирования 12.04.2024  
Принята к печати 30.05.2024

#### AUTHORS

**Vladimir V. Kocharovskiy** — Corresponding member of the RAS, Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Full Professor, Head of Department, IAP RAS, Nizhny Novgorod, 603950, Russia; Scopus ID: 57193021664; <https://orcid.org/0000-0002-0487-4931>; [kochar@ipfran.ru](mailto:kochar@ipfran.ru)

**Aleksei V. Mishin** — PhD (Physics and Mathematics), Junior Researcher, IAP RAS, Nizhny Novgorod, 603950, Russia; Scopus ID: 57219982602; <https://orcid.org/0000-0001-6206-6249>; [mishin@ipfran.ru](mailto:mishin@ipfran.ru)

**Ekaterina R. Kocharovskaya** — PhD (Physics and Mathematics), Senior Researcher, IAP RAS, Nizhny Novgorod, 603950, Russia; Scopus ID: 7801399829; <https://orcid.org/0000-0002-1945-2520>; [katya@ipfran.ru](mailto:katya@ipfran.ru)

The article was submitted to the editorial office 13.11.2023  
Approved after review 12.04.2024  
Accepted for publication 30.05.2024