УДК 535.2

ДИНАМИКА ПРЕДЕЛЬНО КОРОТКИХ ОПТИЧЕСКИХ СОЛИТОНОВ В СИСТЕМЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ КВАНТОВЫХ ОБЪЕКТОВ

© 2007 г. **С. В. Сазонов***, доктор физ.-мат. наук; **Н. В. Устинов****, канд. физ.-мат. наук

* Российский научный центр "Курчатовский институт", Москва

E-mail barab@newmail.ru

** Томский государственный университет, Томск

E-mail: n_ustinov@mail.ru

Теоретически исследовано распространение предельно короткого лазерного импульса, состоящего из обыкновенного и необыкновенного компонентов, в системе анизотропных квантовых центров. Рассмотрение проведено без использования предположения о малой плотности квантовых центров и ограничений на дипольные моменты переходов. Показано, что если спектральная ширина импульса много больше частоты квантовых переходов, то динамика его обыкновенной составляющей подчиняется модифицированному уравнению синус-Гордона, относящемуся к классу интегрируемых моделей. Построены солитонные решения данного уравнения и проведена их классификация. В зависимости от длительности солитона возможны решения в виде 2π-импульсов (кинков и антикинков) или 0π-стационарных бегущих импульсов (нейтральных кинков), не имеющих соответствия в изотропном случае. Изучено поведение среды при прохождении солитонов различных типов.

Коды OCIS: 190.5530, 260.1180, 260.6580.

Поступила в редакцию 04.04.2007.

Введение

В последние годы в связи с генерацией в лабораторных условиях лазерных импульсов длительностью вплоть до одного периода электромагнитных колебаний [1–3] (предельно коротких импульсов (ПКИ)) особую актуальность приобрело теоретическое изучение их взаимодействия с веществом. Так как к столь коротким импульсам неприменимо приближение медленно меняющейся огибающей, то в [4] было предложено рассматривать их нелинейную динамику, используя приближение спектрального перекрытия, основанное на условии

$$\varepsilon \equiv \left(\omega_0 \tau_p\right)^2 \ll 1, \qquad (1)$$

где ω_0 – частота квантовых переходов, взаимодействующих с ПКИ, τ_p – длительность импульса. При этом было показано, что распространение ПКИ описывается уравнением синус-Гордона (СГ).Смысл условия (1) состоит в том, что спектр ПКИ значительно шире, нежели частота квантового перехода, вовлеченного во взаимодействие с импульсом. По этой причине ПКИ, удовлетворяющие (1), можно назвать широкополосными.

С другой стороны, в последнее десятилетие резко увеличился поток работ по исследованию особенностей взаимодействия лазерных импульсов с системами несимметричных квантовых объектов (НКО), обладающих в стационарных состояниях постоянными дипольными моментами (ПДМ) [5–12]. Были выявлены значительные отличия между динамикой ПКИ в системах симметричных и несимметричных квантовых объектов. Большой интерес к этой проблеме обусловлен, в числе прочего, бурным развитием нанотехнологий [13], позволяющих, в частности, создавать среды с наперед заданными свойствами.

Необходимо отметить, что в вышедших ранее работах по оптике НКО не использовалось условие (1). В то же время для несимметричных квантовых ям, образуемых структурами типа $GaAs/Al_{0,14}Ga_{0,86}$ с запирающими барьерами из $Al_{0,3}Ga_{0,3}As$, имеем $\omega_0 \sim 10^{13}\,\text{с}^{-1}$ [13]. Следовательно, для импульсов длительностью $\tau_p \sim 10$ фс условие (1) будет выполняться с хорошей точностью. Поэтому представляет большой интерес изучение распространения широкополосных ПКИ в системе НКО, чему и посвящена настоящая работа.

Модифицированное уравнение синус-Гордона

Пусть среда, содержащая НКО, является изотропной и характеризуется показателем преломления n. НКО будем считать аксиально симметричными с осью симметрии (оптической осью) z декартовой системы координат. Предположим, что асимметрия НКО обусловлена их внутренним электрическим полем. Тогда энергетические уровни НКО вырождены по модулю проекции M электронного углового момента на ось z. Будем для определенности

считать, что основному состоянию соответствует $M = 0$, а возбужденному – $M = \pm 1$.

Пусть импульс распространяется вдоль оси x, перпендикулярной оптической оси. В этих условиях электрическое поле E_o обыкновенного компонента импульса возбуждает квантовые переходы, а поле E_e его необыкновенного компонента динамически смещает их частоту за счет эффекта Штарка. При этом уравнения для элементов $\rho_{\mu\nu}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) матрицы плотности $\hat{\rho}$ можно представить следующим образом [9, 10]:

$$\frac{\partial \rho_{\mu\nu}}{\partial t} = -i\left(\omega_{\mu\nu} - \frac{D_{\mu\mu} - D_{\nu\nu}}{\hbar} E_e\right)\rho_{\mu\nu} + i\left[\hat{\Omega}, \hat{\rho}\right]_{\mu\nu}, \quad (2)$$

где $\omega_{21} = \omega_{31} = -\omega_{12} = -\omega_{13} = \omega_0$, $\omega_{32} = \omega_{23} = 0$, $D_{\mu\mu}$ – диагональные матричные элементы оператора дипольного момента ($\mu = 1, 2, 3$), $\hbar$ – постоянная Планка, $[\cdot, \cdot]_{\mu\nu}$ – матричный элемент коммутатора,

$$\hat{\Omega} = \frac{E_o}{\hbar}\hat{d} = \frac{E_o}{\hbar}\begin{pmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{21} \\ d_{31} & d_{21} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

d_{31} и d_{21} – дипольные моменты соответствующих переходов. Матрица плотности определена здесь следующим образом:

$$\hat{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_{33} & \rho_{32} & \rho_{31} \\ \rho_{23} & \rho_{22} & \rho_{21} \\ \rho_{13} & \rho_{12} & \rho_{11} \end{pmatrix}.$$

В свою очередь импульсные компоненты подчиняются уравнениям

$$\frac{\partial^2 E_o}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{\mu=2}^{3} d_{\mu 1}\left(\rho_{\mu 1} + \rho_{\mu 1}^*\right), \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 E_e}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \frac{4\pi N}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\sum_{\mu=1}^{3} D_{\mu\mu}\rho_{\mu\mu}, \quad (5)$$

где N – концентрация НКО, c – скорость света в вакууме.

Исключим из системы (2), (4), (5) материальные переменные, используя (1). Учитывая, что матрица $\hat{\Omega}$ коммутирует сама с собой в различные моменты времени, в нулевом порядке по малому параметру ε имеем

$$\hat{\rho} = \exp\left(i\hat{\psi}/2\right)\hat{\rho}(-\infty)\exp\left(-i\hat{\psi}/2\right), \quad (6)$$

где $\hat{\psi} = 2\int_{-\infty}^{t}\hat{\Omega}dt'$, $\hat{\rho}(-\infty)$ – матрица плотности частицы до импульсного воздействия.

Принимая во внимание (3), видно, что при любом натуральном k выполняются равенства $\hat{\psi}^{2k+1} = \psi^{2k}\hat{\psi}$, $\hat{\psi}^{2(k+1)} = \psi^{2k}\hat{\psi}^2$, где $\psi = 2(d/\hbar)\int_{-\infty}^{t} E_o dt'$, $d = \sqrt{d_{21}^2 + d_{31}^2}$. Подставив эти соотношения в разложения для операторных экспонент, получим после их суммирования

$$\exp\left(\pm i\hat{\psi}/2\right) = \hat{I} \pm i\frac{\hat{d}}{d}\sin\frac{\psi}{2} - 2\frac{\hat{d}^2}{d^2}\sin^2\frac{\psi}{4}, \quad (7)$$

где $\hat{I}$ – единичная матрица.

Пусть до импульсного воздействия уровни заселены согласно статистике Больцмана, т. е. у матрицы $\hat{\rho}(-\infty)$ отличны от нуля лишь диагональные элементы и $\rho_{33}(-\infty) = \rho_{22}(-\infty) = w_2$, $\rho_{11}(-\infty) = w_1$. Тогда из (6), (7) найдем

$$\rho_{\mu 1} = i\frac{w_1 - w_2}{2}\frac{d_{\mu 1}}{d}\sin\psi, \quad (8)$$

$$\rho_{32} = \left(w_1 - w_2\right)\frac{d_{21}d_{31}}{d^2}\sin^2\frac{\psi}{2}, \quad (9)$$

а выражения для населенностей квантовых уровней примут вид

$$\begin{aligned} \rho_{11} &= w_1 - \left(w_1 - w_2\right)\sin^2\frac{\psi}{2}, \\ \rho_{\mu\mu} &= w_2 + \left(w_1 - w_2\right)\frac{d_{\mu 1}^2}{d^2}\sin^2\frac{\psi}{2}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\mu = 2, 3$.

Подставив (8)–(10) в (2), получим выражения для $\partial\rho_{\mu\nu}/\partial t$ в первом порядке по параметру ε. Это позволяет нам понизить порядок производных в правых частях уравнений (4) и (5)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_o}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 E_o}{\partial t^2} = \\ &= \frac{4\pi d N}{c^2}\left(w_1 - w_2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\omega_0 + \frac{D}{\hbar}E_e\right)\sin\psi\right], \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 E_e}{\partial x^2} - \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2 E_e}{\partial t^2} = \\ &= -\frac{4\pi d N}{c^2}\frac{D}{\hbar}\left(w_1 - w_2\right)\frac{\partial}{\partial t}\left(E_o \sin\psi\right). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь мы ввели обозначение, определяющее эффективный ПДМ НКО,

$$D = \frac{d_{21}^2\left(D_{11} - D_{22}\right) + d_{31}^2\left(D_{11} - D_{33}\right)}{d_{21}^2 + d_{31}^2}. \quad (13)$$

Правые части (11) и (12) пропорциональны малому параметру $\sqrt{\varepsilon}$. Выясним, в каком случае каждое из слагаемых в левых частях этих уравнений много больше соответствующих правых частей. Из (12) находим $E_o \gg 4\pi dN\sqrt{\varepsilon}$. В то же время $E_o \sim \hbar\psi/2d\tau_p \sim \hbar/d\tau_p$. Следовательно, должно выполняться неравенство $\eta\varepsilon \ll 1$, где $\eta = 4\pi d^2 N/\hbar\omega_0$.

Заметим, что последнее неравенство, вообще говоря, не предполагает выполнения условия малой плотности $\eta \ll 1$ [14]. Здесь достаточно только условия (1). Случай $\eta \gg 1$ заведомо исключен из рассмотрения, так как здесь не учтено прямое диполь-дипольное взаимодействие между НКО.

Малость правых частей (11) и (12) позволяет уменьшить в данных уравнениях порядок производных, следуя стандартной процедуре [14], что соответствует приближению однонаправленного распространения. Для этого введем "локальное" время $\tau = t - nx/c$ и "медленную" координату $\zeta = \sqrt{\varepsilon}x$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = -\frac{n}{c}\frac{\partial}{\partial \tau} + \sqrt{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial \zeta}.$$

Пренебрегая квадратом $\sqrt{\varepsilon}$, будем иметь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{n}{c}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\sqrt{\varepsilon}\frac{n}{c}\frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \zeta}.$$

Записав (11) и (12) в новых независимых переменных, после интегрирования по τ с учетом нулевых значений полевых компонентов и их производных на бесконечности получим, вернувшись к переменной x, следующую систему:

$$\frac{\partial E_o}{\partial x} = -\frac{2\pi dN}{cn}\left(w_1 - w_2\right)\left(\omega_0 + \frac{D}{\hbar}E_e\right)\sin\psi, \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_e}{\partial x} = \frac{2\pi dN}{cn}\frac{D}{\hbar}\left(w_1 - w_2\right)E_o \sin\psi. \quad (15)$$

Теперь в верхнем пределе интеграла, определяющего ψ, надо заменить t на τ.

Система (14), (15) обладает интегралом движения

$$E_e^2 + 2\frac{\hbar\omega_0}{D}E_e + E_o^2 = f(\tau), \quad (16)$$

где $f(\tau)$ – функция, определяемая условиями на входе в среду. Заметим, что аналогичный интеграл движения был найден в [15] при использовании приближения среды малой плотности.

Полагая без потери общности $f(\tau) = 0$ [15], выразим из (16) E_e через E_o при условии, что на бесконечности $E_e \to 0$ и $E_o \to 0$. Тогда, приняв во внимание равенство $2dE_o/\hbar = \partial\psi/\partial\tau$, найдем из (14)

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x \partial \tau} = -\beta\sqrt{1 - \tau_c^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\right)^2}\sin\psi, \quad (17)$$

где $\beta = 4\pi d^2 N\omega_0(w_1 - w_2)/\hbar cn$, $\tau_c = |D/2d\omega_0|$.

Уравнение (17) переходит при $\tau_c = 0$ в уравнение СГ и известно как модифицированное уравнение СГ (МСГ) [16–19]. Оно, как и уравнение СГ, также интегрируемо с помощью метода обратной задачи рассеяния [20, 21].

Динамика двухкомпонентного солитона и несимметричных квантовых объектов

Изучим особенности взаимодействия ПКИ с НКО на основе односолитонного решения уравнения (17), которое можно записать в виде

$$\psi = \pm 2\arccos\frac{q - \operatorname{th}\chi}{\sqrt{1 - 2q\operatorname{th}\chi + q^2}}, \quad (18)$$

где $q = \tau_c/\tau_p$, $\chi = (t - x/v)/\tau_p$, скорость v распространения солитона связана с его длительностью соотношением

$$\frac{1}{v} = \frac{n}{c} + \beta\tau_p^2. \quad (19)$$

При этом для обыкновенного компонента ПКИ имеем

$$E_o = \pm\frac{\hbar}{d\tau_p}\operatorname{sech}\chi\frac{1 - q\operatorname{th}\chi}{1 - 2q\operatorname{th}\chi + q^2}. \quad (20)$$

"Площадь" $A_o \equiv \psi_{\tau\to\infty}$ обыкновенного компонента солитона равна

$$A_o = \begin{cases} \pm 2\pi, & \tau_p > \tau_c, \\ 0, & \tau_p < \tau_c. \end{cases} \quad (21)$$

Выражения (10), (16), (18)–(21) дают полное представление о динамике векторного ПКИ и населенностей уровней НКО.

Как видно из (21), односолитонные ПКИ в зависимости от их площади, определяемой величиной свободного параметра τ_p, можно разбить на три семейства. Первые два семейства с $A_o = \pm 2\pi$ (однополярные 2π-импульсы; кинки и антикинки) существуют также у уравнения СГ, описывающего динамику ПКИ в изотропных средах. Солитоны из семейства с $A_o = 0$, длительность которых меньше критического значения τ_c, являются двухполярными. В отличие от бризеров уравнения СГ, "площадь" которых тоже равна нулю (0π-импульсы), эти решения являются стационарными: их профиль в сопутствующей системе отсчета не претерпевает изменений. В дальнейшем этот тип солитонных решений будем называть нейтральными кинками.

Сделаем некоторые численные оценки. Взяв для структур типа $GaAs/Al_{0,14}Ga_{0,86}$ с запирающими барьерами из $Al_{0,3}Ga_{0,3}As$ $|D/d| \approx 0{,}2$ [22], $\omega_0 \sim 10^{13}$ с$^{-1}$, имеем $\tau_c \sim 10$ фс. Полагая, кроме того, $D \sim 10^{-18}$ СГСЭ, $d \sim 5\times10^{-18}$ СГСЭ, $\tau_p \sim 10$ фс, получим для интенсивностей обыкновенной I_o и необыкновенной I_e составляющих рассматриваемых импульсов следующие значения: $I_{o,e} \approx cE_{o,e}^2/4\pi \sim 10^{10} - 10^{11}$ Вт см$^{-2}$, где мы считали, что $E_o \sim \hbar/d\tau_p$, $E_e \sim \hbar\omega_0/D$.

Заметим, что в средах НКО с высокой степенью асимметрии, у которых $|D/d| \geq 1$, могут существовать только нейтральные кинки. Возможность же формирования однополярных импульсов (кинков или антикинков) вступает в противоречие с условием (1). Импульсы обоих типов возможны только в средах, где эффективный ПДМ мал по сравнению с дипольными моментами квантовых переходов. Также необходимо отметить, что рассматриваемые солитонные решения ограничены по амплитуде. Эта особенность является следствием существования интеграла (16).

Обыкновенная составляющая однополярного солитона при $\tau_p > \sqrt{2}\tau_c$ обладает одним центральным максимумом. Динамика среды, способствующая распространению данного солитона, практически не отличается от таковой в случае изотропной среды, где справедливо уравнение СГ: передняя часть импульса полностью инвертирует населенности уровней, а задняя возвращает их к исходному состоянию. Если же $\tau_c < \tau_p < \sqrt{2}\tau_c$, то обыкновенный компонент солитона обладает двумя симметричными горбами с амплитудами $E_{om} = \hbar\omega_0/|D|$, первый из которых вызывает квантовые переходы и инвертирует населенности уровней НКО. Затем начинается рост необыкновенной составляющей, достигающей максимального по величине значения $2\mathrm{sign}(D)E_{om}$ в центре солитона. Эта составляющая сдвигает уровни НКО за счет эффекта Штарка так, что энергия основного состояния становится больше, чем у возбужденного. Таким образом, в промежутке между горбами среда эффективно находится в основном энергетическом состоянии, которое в отсутствие солитона является возбужденным и, соответственно, неустойчивым. С приближением второго горба обыкновенного компонента необыкновенная составляющая убывает, возвращая взаимное положение квантовых уровней к исходному. В это же время второй горб обыкновенного компонента возвращает НКО в основное состояние. Данный механизм распространения, присущий только среде из НКО, позволяет понять, что на интервал между горбами обыкновенного компонента (а он неограниченно возрастает при стремлении τ_p к τ_c) не накладывается ограничение, связанное с процессами релаксации. Здесь важно только, чтобы длительность горбов, определяемая величиной τ_p, была значительно меньшей времен фазовой и энергетической релаксаций.

Аналогичен описанному выше и механизм распространения нейтральных кинков, у которых интервал между горбами превосходит их длительность. При укорочении же длительности горбы сближаются и уменьшается степень возбуждения НКО.

Объяснить такую разницу в поведении среды можно на основе спектрального анализа обыкновенного компонента. Выполнив преобразование Фурье

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_o e^{i\omega t}\, dt,$$

найдем для спектральной плотности

$$|F(\omega)|^2 = \frac{\pi^2\hbar^2}{2d^2}\,\mathrm{sech}^2\,\frac{\pi\omega\tau_p}{2}\times \\ \times\left[1+\mathrm{sign}\left(1-q^2\right)\cos\left(\omega\tau_p \ln\left|\frac{1+q}{1-q}\right|\right)\right]. \qquad (22)$$

При $q < 1$ спектр обыкновенной составляющей импульса центрирован на нулевой частоте и хорошо перекрывает квантовый переход вследствие условия (1). При этом необыкновенный компонент сдвигает частоту перехода в красную область, еще ближе к максимуму спектральной плотности. Если $q > 1$, то на нулевой частоте $|F(\omega)| = 0$, а красный штарковский сдвиг за счет необыкновенной составляющей эффективно выводит обыкновенный компонент из резонанса. В пределе $q \gg 1$ из (22) получаем

$$|F(\omega)|^2 = \left(\frac{\pi\hbar}{d}\,\frac{\omega\tau_p}{q}\right)^2 \mathrm{sech}^2\,\frac{\pi\omega\tau_p}{2}.$$

Максимум спектральной плотности в этом случае соответствует частоте ω_m, такой, что $\omega_m\tau_p = 0{,}76$. В силу (1) в спектре обыкновенного компонента практически отсутствуют резонансные фурье-компоненты, что и обуславливает слабое возбуждение среды.

Заключение

Проведенное в настоящей работе исследование показывает, что динамика широкополосных ПКИ в среде несимметричных квантовых объектов значительно разнообразнее, нежели соответствующая динамика в изотропных средах. Полученное нами уравнение МСГ (17) обобщает уравнение СГ, найденное ранее для случая взаимодействия широко-

полосных ПКИ со средой симметричных молекул [4]. Это уравнение имеет новый тип решений – нейтральные кинки. Кроме того, в отличие от импульсов уравнения СГ, солитоны уравнения МСГ ограничены по амплитуде и имеют асимметрию по полярности одного из компонентов: знак необыкновенной составляющей такой, что частота перехода при прохождении импульса уменьшается.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-02-16422).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Auston D.H., Cheung K.P., Valdmanis J.A., Kleinman D.A.* Cherenkov radiation from femtosecond optical pulses in electro-optic media // Phys. Rev. Lett. 1984. V. 53. P. 1555–1558.
2. *Sutter D.H. et al.* Sub-6-fs pulses from a SESAM-assisted Kerr-lens modelocked Ti: sapphire laser: At the frontiers of ultrashort pulse generation // Appl. Phys. B: Lasers Opt. 2000. V. 70. S5–S12.
3. *Loyo-Maldonaldo V. et al.* Generation of ultrashort electrical pulses in semiconductor waveguides // IEEE Photon. Technol. Lett. 2003. V. 15. P. 428–430.
4. *Беленов Э.М., Назаркин А.В.* Решения уравнений нелинейной оптики без использования приближения медленно меняющихся амплитуд и фаз // Письма в ЖЭТФ. 1990. Т. 51. С. 252–255.
5. *Casperson L.W.* Few-cycle pulses in two-level medium // Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 609–621.
6. *Agrotis M., Ercolani N.M., Glasgow S.A., Moloney J.V.* Complete integrability of the reduced Maxwell–Bloch equations with permanent dipole // Physica D. 2000. V. 138. P. 134–162.
7. *Заболотский А.А.* Усиление предельно коротких импульсов в оптической среде // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. С. 1012–1027.
8. *Маймистов А.И., Капуто Дж.-Ги.* Предельно короткие электромагнитные импульсы в резонансной среде, обладающей постоянным дипольным моментом // Опт. и спектр. 2003. Т. 94. С. 275–280.
9. *Сазонов С.В.* Эффекты резонансной прозрачности в анизотропой среде с постоянным дипольным моментом // ЖЭТФ. 2003. Т. 124. С. 803–819.
10. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* Режимы резонансной прозрачности в условиях синхронизма длинных и коротких волн // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. С. 289–307.
11. *Елютин С.О.* Динамика предельно короткого импульса в штарковской среде // ЖЭТФ. 2005. Т. 128. С. 17–29.
12. *Сазонов С.В., Устинов Н.В.* Импульсная прозрачность анизотропных сред со штарковским расщеплением уровней // Квантовая электроника. 2005. Т. 35. С. 701–704.
13. *Демиховский В.Я., Вугальтер Г.А.* Физика квантовых низкоразмерных структур. М.: Логос, 2000. 178 с.
14. *Eilbeck J.C., Gibbon J.D., Caudrey P.J., Bullough R.K.* Solitons in nonlinear optics. I. A more accurate description of the 2π pulse in self-induced transparency // J. Phys. A. Math. Nucl. Gen. Phys. 1973. V. 6. P. 1337–1347.
15. *Заболотский А.А.* Динамика продольно-поперечной акустической волны в кристалле с парамагнитными примесями // Письма в ЖЭТФ. 2002. Т. 76. С. 709–713.
16. *Kruskal M.D.* The Korteweg-de Vries equation and related evolution equations // Lect. Appl. Math. 1974. V. 15. P. 61–83.
17. *Chen H.H.* General derivation of Bäcklund transformations from inverse scattering problems // Phys. Rev. Lett. 1974. V. 33. P. 925–928.
18. *Nakamura A.* Exact multi-soliton solutions of the modified sine-Gordon equation // J. Phys. Soc. Japan. 1980. V. 49. P. 1167–1170.
19. *Борисов А.Б., Зыков С.А.* Одевающая цепочка дискретных симметрий и размножение нелинейных уравнений // ТМФ. 1998. Т. 115. С. 199–214.
20. *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980. 319 с.
21. *Лэм Дж.Л.* Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983. 294 с.
22. *Kočinac S., Iconić Z., Milanović V.* The influence of permanent dipole moments on second harmonic generation in asymmetric semiconductor quantum wells // Optics Commun. 1997. V. 140. P. 89–92.