

АБЕРРАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ ОТРАЖАЮЩИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ СФЕРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ С КОМПЕНСАТОРОМ

© 2004 г. А. П. Грамматин, доктор техн. наук; Е. А. Демидова; В. А. Зверев, доктор техн. наук;
Г. Э. Романова

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики

Получены соотношения, определяющие положение входного зрачка оптической системы из двух отражающих поверхностей сферической формы, при котором кома третьего порядка равна нулю, в зависимости от центрального экранирования по диаметру зрачка. При этом дано обоснование достижения апланатической коррекции aberrаций путем совмещения одной из поверхностей плоскопараллельной пластинки с плоскостью входного зрачка и придания ей квазипланоидной формы, приведена последовательность ее расчета. Показана возможность плананастигматической коррекции aberrаций.

Коды OCIS: 080.0080, 110.0110.

Поступила в редакцию 08.10.2003.

Для решения различных научных и прикладных задач широко применяются оптические системы, образованные двумя отражающими поверхностями. Для определения прежде всего габаритных соотношений в такой системе удобно представить ее с помощью углов, образованных осевым виртуальным лучом с оптической осью:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0 & n_1 &= 1 \\ \alpha_2 &= \alpha & d_1 &= d & n_2 &= -1 \\ \alpha_3 &= \alpha' & n_3 &= 1.\end{aligned}$$

В области aberrаций третьего порядка влияние оптической системы на кривизну образованного ею изображения определяется коэффициентом S_{IV} (четвертой суммой Зейделя) в выражении:

$$z'_p = -\frac{1}{2n'} w^2 J^2 S_{IV},$$

где z'_p – осевая координата пещвалеовой поверхности изображения, w – угол поля, J – инвариант Лагранжа–Гельмгольца, причем $J = n'\alpha'l'$.

Положив $n' = 1$, $\alpha' = 1$ и $\beta_1 = 1$, при $l' = -f'\beta_1 = -f'$ получаем $J = -f'$. При этом

$$z'_p = -\frac{1}{2} f'^2 w^2 S_{IV} = -\frac{1}{2} y_0'^2 S_{IV}.$$

Здесь y_0' – номинальная величина изображения, а четвертая сумма Зейделя:

$$S_{IV} = \sum_{i=1}^n \frac{v_i \alpha_{i+1} - v_{i+1} \alpha_i}{h_i}, \text{ где } v = \frac{1}{n}.$$

При принятых условиях нормировки углов α имеем:

$$S_{IV} = \frac{\alpha}{h_1} - \frac{1+\alpha}{h_2}.$$

Отношение высот $\frac{h_2}{h_1} = \eta$ определяет величину центрального экранирования осевого пучка лучей по диаметру. При этом, учитывая, что $h_1 = f'$, в масштабе фокусного расстояния (т. е. при $f' = 1$) получаем:

$$S_{IV} = -\frac{1 + (1 - \eta)\alpha}{\eta}.$$

Отсюда находим

$$\alpha = -\frac{\psi}{1 - \eta}, \quad (1)$$

где $\psi = 1 + \eta S_{IV}$.

Высота $h_2 = h_1 - \alpha d$, и, соответственно, $\eta = 1 - \alpha d$.

При этом

$$d = \frac{1 - \eta}{\alpha} = -\frac{(1 - \eta)^2}{\psi}. \quad (2)$$

Обозначим расстояние от вершины первой по ходу луча отражающей поверхности до осевой точки параксиального изображения предмета, образованного системой в целом, буквой p . Тогда $s'_{F'} - p = -d$, где расстояние от вершины второй по ходу луча отражающей поверхности до осевой точки параксиального изображения

$$s'_{F'} = \frac{h_2}{\alpha'} = h_2 = h_1 \eta = f' \eta = \eta.$$

В результате находим, что

$$p = s'_{F'} + d = \eta - \frac{(1 - \eta)^2}{\psi}. \quad (3)$$

Заметим, что радиусы отражающих поверхностей r_1 и r_2 равны:

$$r_1 = 2 \frac{h_1}{\alpha} = 2 f' \frac{1}{\alpha}, \quad r_2 = 2 \frac{h_2}{1 + \alpha} = 2 f' \frac{\eta}{1 + \alpha}.$$

При этом

$$S_{IV} = 2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

При $r_1 = r_2$ имеем: $S_{IV} = 0$, $\psi = 1$, $p = \eta - (1 - \eta)^2 = -(\eta^2 - 3\eta + 1)$.

Решив последнее уравнение, получаем

$$\eta = \frac{3 \pm \sqrt{5 - 4p}}{2}.$$

Следовательно, при $\eta \leq 2,618$ получаем оптическую систему микрообъектива, а при $\eta \geq 0,382$ – объектива телескопа ($p \geq 0$). При $r_2 = \infty$ коэффициент $S_{IV} = \frac{2}{r_1} = \alpha = -\frac{\psi}{1 - \eta}$. Отсюда следует, что в этом случае $S_{IV} = -1$, а $p = 2\eta - 1$.

Если при этом осевую точку входного зрачка совместить с центром кривизны первой отражающей поверхности, то световые пучки лучей, образующие изображение на сферической поверхности, радиус которой равен половине радиуса кривизны первой отражающей поверхности системы, будут обладать лишь сферической аберрацией. Поместив во входном зрачке плоскопараллельную пластину и заменив одну из ее поверхностей несферической поверхностью, деформация которой компенсирует сферическую аберрацию, вносимую зеркальной системой, получим известную оптическую систему Б. Шмидта.

Рассмотрим вариант оптической системы, образованной сочетанием двух отражающих поверхностей сферической формы. Для получения стигматического изображения осевой точки компенсатор Шмидта может быть применен и в двухзеркальных системах. Расположенный непосредственно перед зеркальной системой (перед малым зеркалом), компенсатор позволяет устранить остаточную сферическую аберрацию и существенно уменьшить кому и астигматизм третьего порядка собственно зеркальной системы [1].

Однако, как показал проф. Грамматин А.П. на примере расчета конкретной системы, существует такое положение входного зрачка, при котором кома в изображении, образованном оптической системой из двух отражающих поверхностей сферической формы, отсутствует. Выполним анализ построенной таким образом системы в области аберраций третьего порядка.

Коэффициенты аберраций третьего порядка удобно определить выражениями следующего вида [1–3]:

$$S_I^* = S_I = B_0, \quad (4)$$

$$S_{II}^* = \frac{1}{f} S_{II} = K_0 + qB_0, \quad (5)$$

$$S_{III}^* = \frac{1}{f^2} S_{III} = C_0 + 2qK_0 + q^2B_0, \quad (6)$$

$$S_{IV}^* = S_{IV} = D_0, \quad (7)$$

$$S_V^* = \frac{1}{f^3} S_V = E_0 + q(3C_0 + D_0) + 3q^2K_0 + q^3B_0, \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= \sum_{i=1}^n h_i P_i, \quad K_0 = -\sum_{i=1}^n W_i + \sum_{i=1}^n h_i S_i P_i, \\ C_0 &= \sum_{i=1}^n \frac{v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i}{h_i} - 2 \sum_{i=1}^n S_i W_i + \sum_{i=1}^n h_i S_i^2 P_i, \\ D_0 &= \sum_{i=1}^n \frac{v_i \alpha_{i+1} - v_{i+1} \alpha_i}{h_i}, \\ E_0 &= -\sum_{i=1}^n \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{h_i^2} + \sum_{i=1}^n S_i \frac{v_i \alpha_{i+1} - v_{i+1} \alpha_i}{h_i} + \\ &+ 3 \sum_{i=1}^n S_i \frac{v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i}{h_i} - 3 \sum_{i=1}^n S_i^2 W_i + \sum_{i=1}^n h_i S_i^3 P_i, \\ W_i &= \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} (v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i), \\ P_i &= \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} W_i, \quad v_i = \frac{1}{n_i}, \quad S_i = \sum_{k=2}^i \frac{d_{k-1}}{n_k h_k h_{k-1}}. \end{aligned}$$

$$\text{Здесь } q = \frac{v_1}{h_1^2 \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_{p'}} \right)}.$$

$$\text{При } v_1 = 1, s_1 = \infty \text{ получаем } q = -\frac{1}{h_1^2} s_{p'} = -s_{p'}.$$

В рассматриваемом случае при выбранной нормировке величин имеем:

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{1}{2} \frac{\psi^2}{(1 - \eta)^2}, \quad W_2 = \frac{1 - \alpha^2}{2} = \frac{1}{2} \frac{(1 - \eta)^2 - \psi^2}{(1 - \eta)^2}, \\ P_1 &= -\frac{1}{4} \alpha^3 = -\frac{1}{4} \frac{\psi^3}{(1 - \eta)^3}, \\ P_2 &= \frac{1 - \alpha^2}{4} (1 - \alpha) = \frac{1}{4} \left[1 - \frac{\psi^3 - \psi(1 - \eta)(1 - \eta - \psi)}{(1 - \eta)^3} \right], \\ S_1 &= 0, \quad S_2 = -\frac{d}{\eta} = \frac{(1 - \eta)^2}{\eta \psi}. \end{aligned}$$

При этом

$$\begin{aligned} B_0 &= h_1 P_1 + h_2 P_2 = P_1 + \eta P_2 = \\ &= \frac{\psi^3 - \eta \psi^2 + \eta(1 - \eta)\psi + \eta(1 - \eta)^2}{4(1 - \eta)^2}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$K_0 = -W_1 - W_2 - h_2 S_2 P_2 = \frac{\psi^3 + (1-\eta)\psi^2 + (1-\eta^2)\psi - (1-\eta)^3}{4(1-\eta)\psi}, \quad (10)$$

$$C_0 = \frac{v_2 \alpha_2 - v_1 \alpha_1}{h_1} + \frac{v_3 \alpha_3 - v_2 \alpha_2}{h_2} - \frac{-2S_2 W_2 + h_2 S_2^2 P_2}{\eta} = \frac{1}{\eta} \left[1 - \frac{(1-\eta)^2}{\psi} - \frac{1-\eta}{4} \frac{\psi^3 + (1-\eta)\psi^2 - (1-\eta)^2\psi - (1-\eta)^3}{\psi^2} \right]. \quad (11)$$

При $\eta S_{IV} = 0$ имеем $\psi = 1$. В этом случае выражения (9)–(11) принимают вид:

$$B_0 = \frac{1}{4} \left(\eta + \frac{1+\eta}{1-\eta} \right), \quad (12)$$

$$K_0 = -\frac{1}{2} \left(1 + 2\eta + \frac{\eta^3}{2(1-\eta)} \right), \quad (13)$$

$$C_0 = 1 + \eta \frac{4-\eta}{4} (1-\eta). \quad (14)$$

Положив в выражении (5) коэффициент $S_{II} = 0$, получаем

$$q = -s_{p'} = -\frac{K_0}{B_0}.$$

Используя выражения (9) и (10), полученное соотношение можно преобразовать к виду:

$$s_{p'} = -\frac{1-\eta}{\psi} \left[1 + \frac{\psi^2 - (1-\eta)(1-\eta-\psi)}{\psi^3 - \eta\psi^2 + \eta(1-\eta)(1-\eta+\psi)} \right]. \quad (15)$$

При $\psi = 1$ имеем

$$s_{p'} = -2 + \eta + \frac{\eta}{1+2\eta-\eta^2}. \quad (16)$$

Положив $\eta = 0$ (в этом случае осевая точка изображения будет расположена в вершине второй отражающей поверхности), получаем $s_{p'} = -2$, что и следовало ожидать.

Заметим, что при $\eta = 0$ коэффициенты, определяемые формулами (12), (13) и (14), равны:

$$B_0 = \frac{1}{4}, \quad K_0 = -\frac{1}{2} \quad \text{и} \quad C_0 = 1.$$

Подставив эти значения коэффициентов в выражения (4), (5) и (6), получаем $S_I = \frac{1}{4}$, $S_{II} = 0$ и $S_{III} = 0$.

Остаточный астигматизм третьего порядка определяется коэффициентом S_{III}^* , в соответствии с выражением (6) при $S_{II}^* = K_0 + qB_0 = 0$ равным

$$S_{III}^* = S_{III} = C_0 + qK_0 = C_0 - s_{p'}K_0. \quad (17)$$

Используя соотношения (13), (14) и (16), при $\psi = 1$ получаем

$$S_{III} = -\frac{1}{4} \frac{\eta^2}{(1-\eta)(1+2\eta-\eta^2)}. \quad (18)$$

Итак, при входном зрачке, расположенном относительно вершины первой поверхности оптической системы на расстоянии $s_{p'}$, определяемом формулой (15), система из двух отражающих поверхностей сферической формы обладает изопланатической коррекцией aberrаций. Сферическую aberrацию в волновой мере определим выражением [2]:

$$W = \int_0^{\sigma'_{кр}} (\Delta s' - \Delta') \sin \sigma' d\sigma', \quad (19)$$

где $\Delta s'$ – продольная сферическая aberrация, Δ' – смещение так называемой плоскости наилучшей установки относительно плоскости параксиального изображения. В этом выражении удобно продольные величины заменить поперечными, равными $\delta g' = \Delta s' \tan \sigma'$, $\delta g'_0 = \Delta' \tan \sigma'$.

При этом выражение (19) принимает вид:

$$W = \int_0^{\sin \sigma'_{кр}} (\delta g' - \delta g'_0) d \sin \sigma'. \quad (20)$$

Отсюда очевидна целесообразность представления зависимости поперечной сферической aberrации от заданной числовой апертуры степенным рядом:

$$\delta g' = a_3 \sin^3 \sigma' + a_5 \sin^5 \sigma' + \dots \quad (21)$$

При этом

$$W = \frac{1}{4} a_3 \sin^4 \sigma' + \frac{1}{6} a_5 \sin^6 \sigma' + \dots - \Delta' \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \sigma'} \right).$$

Положив для крайнего луча $W(\sin \sigma'_{кр}) = 0$, получаем

$$\Delta' = \frac{1}{12} \frac{3a_4 \sin^4 \sigma'_{кр} + 2a_5 \sin^6 \sigma'_{кр} + \dots}{1 - \sqrt{1 - \sin^2 \sigma'_{кр}}}. \quad (22)$$

Экстремальное значение волновой aberrации и его ординату определим из условия: $\frac{dW}{d \sin \sigma'} = 0$. При этом из выражения (20) следует, что $\delta g'(\sin \sigma'_0) - \delta g'_0(\sin \sigma'_0) = 0$ или, что то же самое, $\Delta s'(\sin \sigma'_0) = \Delta'$. Подставив выражение (21) в последнее равенство, получаем уравнение

$$a_3 \sin^3 \sigma'_0 + a_5 \sin^5 \sigma'_0 + \dots - \Delta' \tan \sigma'_0 = 0, \quad (23)$$

определяющее значение числовой апертуры $\sin \sigma'_0$, при котором волновая сферическая aberrация принимает экстремальное значение. При этом экстремальное значение волновой aberrации равно

$$W_{\text{extr}} = \frac{1}{4} a_3 \sin^4 \sigma'_0 + \frac{1}{6} a_5 \sin^6 \sigma'_0 + \dots - \Delta' \left(1 - \sqrt{1 - \sin^2 \sigma'_0} \right). \quad (24)$$

Заметим, что величина σ'_0 зависит от коэффициентов $a_3, a_5, \dots$ и может принимать произвольные значения в диапазоне от 0 до $\sigma' = \sigma'_{\text{кр}}$. С другой стороны, $\sin \sigma' = \frac{m}{f'}$. При $f' \approx f'_0$ величина $m = m_{\text{кр}}$ соответствует значению ординаты на краю зрачка, при котором $W(m) = W(m_{\text{кр}}) = 0$, а величина $m = m_0$ определяет ординату на входном зрачке, при которой волновая aberrация $W(m_0) = W_{\text{extr}}$.

Предположим, что во входном зрачке двухзеркальной системы расположена плоскопараллельная пластинка, которая вполне может выполнять роль защитного стекла. При этом сферическую aberrацию в изображении точки, вносимую двухзеркальной системой, можно естественным образом компенсировать деформацией второй поверхности пластинки.

Пусть начало O системы координат хуз совпадает с осевой точкой второй поверхности пластинки. При этом ось Oz направлена вдоль оптической оси зеркальной системы. Тогда осевая деформация W_k плоского волнового фронта, падающего на несферическую поверхность пластинки, определяется координатой z поверхности и равна [4]:

$$W_k = (1 - n)z, \quad (25)$$

где n — показатель преломления материала пластинки. Поскольку волновая сферическая aberrация для осевой координаты зрачка равна нулю, т. е. $W(0) = 0$, то естественно несферическую поверхность считать planoидной, т. е. поверхностью, радиус кривизны в вершине которой равен бесконечности. При этом несферическую поверхность можно определить уравнением вида:

$$z = ay^4 + by^6.$$

По характеру изменения компенсируемой волновой aberrации, вносимой зеркальной системой, при $y_{\text{кр}} \approx m_{\text{кр}}$ координата $z_{\text{кр}} = 0$. При этом имеем

$$b = -\frac{a}{y_{\text{кр}}^2} \approx -\frac{a}{m_{\text{кр}}^2}.$$

Положив $\frac{dz}{dy} = 4ay^3 + 6by^5 = 0$, находим значение координаты y_0 , при котором координата z принимает экстремальное значение: $y_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{a}{b}}$.

Но поскольку $b = -\frac{a}{m_{\text{кр}}^2}$, то $y_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} m_{\text{кр}}$. Вполне очевидно, что в общем случае $y_0 \neq m_0$, а следовательно, рассматриваемая несферическая поверхность не может полностью (или по крайней мере наилучшим образом) компенсировать сферическую aberrацию в пределах всего зрачка. Легко убедиться, что экстремальное значение координаты z поверхности, определяемой уравнением $z = \frac{1}{2r_0} y^2 + ay^4$, где r_0 — радиус кривизны в вершине поверхности, достигается при $y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} m_{\text{кр}}$. Следовательно, в общем случае для оптимальной коррекции сферической aberrации, вносимой в изображение точки двухзеркальной системой, правая часть уравнения несферической поверхности должна содержать три члена с неравными нулю коэффициентами:

$$z = \frac{1}{2r_0} y^2 + ay^4 + by^6. \quad (26)$$

Характер коррекции остаточной волновой сферической aberrации определяет три очевидных условия, которым должно удовлетворять уравнение (26) несферической поверхности.

1. При $y_{\text{кр}} = m_{\text{кр}}$ координата $z_{\text{кр}} = 0$, а следовательно, в соответствии с уравнением (26) должно выполняться условие:

$$bm_{\text{кр}}^4 + am_{\text{кр}}^2 + \frac{1}{2r_0} = 0. \quad (27)$$

2. При $y_0 = m_0$ должно выполняться условие $\frac{dz}{dy} = \frac{dW}{dm} = 0$. При этом в соответствии с уравнением (26) имеем:

$$6bm_0^4 + 4am_0^2 + \frac{1}{r_0} = 0. \quad (28)$$

3. При $y_0 = m_0$ экстремальное значение деформации плоского волнового фронта, вносимой несферической поверхностью, должно быть равно экстремальному значению остаточной волновой сферической aberrации. При этом в соответствии с уравнениями (25) и (26) получаем:

$$W(m_0) = W_{\text{extr}} = (1 - n)z_{\text{extr}} = \frac{m_0^2}{2r_0} + am_0^4 + bm_0^6. \quad (29)$$

Решая систему линейных уравнений (27)–(29), находим значения радиуса кривизны r_0 в вершине несферической поверхности и коэффициентов a и b . В результате получаем оптическую систему с апланатической коррекцией aberrаций.

Заметим, что луч, падающий на плоскопараллельную пластинку на высоте $y_0 = m_0$, проходит ее без отклонений в направлении, а следовательно, пересекает оптическую ось в пространстве изображений зеркальной системы в плоскости наилучшей установки изображения. Поскольку коррекция сферической аберрации осуществляется относительно именно этой плоскости, то роль осевой оптической силы пластинки, определяемой радиусом кривизны в вершине поверхности r_0 и показателем преломления n материала пластинки, практически сводится к смещению параксиального изображения, образованного зеркальной системой, в плоскость наилучшей установки. Кроме того, поскольку рассматриваемый луч проходит пластинку без изменений направления независимо от материала пластинки, то в точке его пересечения с оптической осью отсутствует хроматическая аберрация положения. Таким образом, рассматриваемая несферическая поверхность, форма которой определяется принятым характером коррекции остаточной сферической аберрации, обладает достаточно хорошей коррекцией хроматической аберрации положения, однако вносит сферохроматическую аберрацию, величина которой тем больше, чем выше относительное отверстие рассматриваемой системы.

Как было показано, при $\eta = 0$ расстояние $s_p = -2$, при этом $S_{II} = S_{III} = 0$. Естественнo предположить, что при $\eta \neq 0$ найдется такое положение входного зрачка, при котором $S_{III} = 0$. Положив в выражении (6) коэффициент $S_{III} = 0$, получаем уравнение, определяющее такое положение входного зрачка, в виде:

$$q^2 + 2 \frac{K_0}{B_0} q + \frac{C_0}{B_0} = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$s_{p'} = \frac{K_0}{B_0} \pm \sqrt{\frac{K_0^2}{B_0^2} - \frac{C_0}{B_0}}, \text{ где } s_{p'} = -q.$$

Как было показано, при $S_{II} = 0$ расстояние $s_{p'} = s_{p'k} = \frac{K_0}{B_0}$. Обозначив при $S_{III} = 0$ расстояние $s_{p'} = s_{p'a}$, получаем

$$s_{p'a} = s_{p'k} \pm \sqrt{s_{p'k}^2 - \frac{C_0}{B_0}}. \quad (30)$$

Используя уравнения (12)–(14) и (16), легко убедиться, что при $\psi = 1$ и $\eta = 0,4$ расстояние $s_{p'a} = -1,356 \pm 0,244$. Расположив в любом из этих зрачков афокальный двухлинзовый компенсатор [5] сферической аберрации и комы, получим оптическую систему с коррекцией аберраций апохроматического плананастигмата.

С другой стороны, при $S_{II} = 0$, $\psi = 1$ и $\eta = 0,4$ в соответствии с формулой (16) получаем $S_{III} = 0,04$. Таким образом, и в этом случае, то есть в системе с коррекционной пластинкой, имеем достаточно хорошую коррекцию астигматизма.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слюсарев Г.Г. Расчет оптических систем. Л.: Машиностроение, 1975. 640 с.
2. Чуриловский В.Н. Теория хроматизма и аберраций третьего порядка. Л.: Машиностроение, 1968. 312 с.
3. Зверев В.А. Основы геометрической оптики. СПб ГИТМО, 2002. 218 с.
4. Погарев Г.Г. Юстировка оптических приборов. Л.: Машиностроение, 1982. 237 с.
5. Волосов Д.С. Методы расчета сложных фотографических систем. М.: Гостехиздат, 1948. 396 с.