

УДК 539.5:528.526.6:53.096

# Применение трансверсально-изотропных характеристик контура для расчета параметров теплового дрейфа волоконно-оптического гироскопа

© 2019 г. **И. А. Есипенко\***; **Д. А. Лыков\***, \*\*; **О. Ю. Сметанников\*\***

\*Пермская научно-производственная приборостроительная компания, Пермь

\*\*Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь

E-mail: lykovdaperm@gmail.com

Поступила в редакцию 05.12.2018

DOI:10.17586/1023-5086-2019-86-05-36-44

Рассмотрена возможность перехода от структурно-неоднородной модели контура к однородной трансверсально-изотропной среде при расчете теплового дрейфа волоконно-оптического гироскопа с целью экономии вычислительных ресурсов. Переход к эффективным характеристикам осуществлен с помощью серии вычислительных экспериментов с использованием метода конечных элементов и аналитических формул. При дальнейшем вычислении теплового дрейфа продемонстрировано удовлетворительное совпадение между исследуемыми моделями материалов. Результаты расчетов поставлены в соответствие с экспериментальными данными для двух схем намотки волоконного контура — квадрупольной и октупольной. Показано, что применение материала с эффективными характеристиками снижает на порядок потребление оперативной памяти и время расчета.

**Ключевые слова:** волоконно-оптический гироскоп, волоконный контур, квадрупольная схема намотки, октупольная схема намотки, тепловой дрейф, кажущаяся угловая скорость, термооптический эффект, упругооптический эффект, трансверсально-изотропная модель материала, квазистационарная задача термоупругости, метод конечных элементов.

**Коды OCIS:** 060.2800, 060.2290

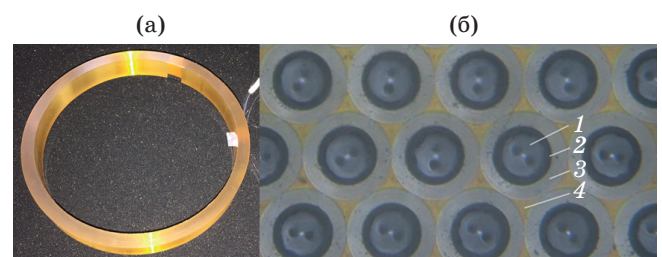
## ВВЕДЕНИЕ

Волоконно-оптический гироскоп (ВОГ) — это оптико-электронный прибор для измерения угловой скорости объекта, на котором он установлен [1–2]. Он широко используется в системах стабилизации, управления и навигации благодаря высокой точности определяемых угловых скоростей [3]. Однако в условиях нестационарного теплового воздействия на волоконный контур, который является чувствительным элементом вращения ВОГ, появляется кажущаяся угловая скорость (тепловой дрейф), существенно снижающая точность прибора [4–6].

Для количественной оценки теплового дрейфа и его минимизации на этапе проектирования ВОГ создается математическая модель кажущейся угловой скорости, в которой, как правило, для контура решается квазистационарная задача термоупругости. В такой задаче сечение реального волоконного контура (рис. 1) представляется либо

структурно-неоднородным [7–9], либо однородным с эффективными физико-механическими характеристиками [10–14].

Структурно-неоднородное представление контура даже в осесимметричной постановке требует больших вычислительных ресурсов. Поэтому при



**Рис. 1.** Волоконный контур производства ПАО «ПНППК» (а) и фрагмент его поперечного сечения (б). 1 — оптическое волокно типа «Panda», 2 — первичное покрытие, 3 — вторичное покрытие, 4 — эпоксидный компаунд.

расчетах кажущейся угловой скорости на большом промежутке времени в широком диапазоне температур представляется необходимым переход к упрощенной модели материала. В качестве однородного материала с эффективными свойствами для волоконного контура обычно используют трансверсально-изотропную модель среды [11–16], которую авторы считают наиболее адекватно описывающей поведение контура. Однако в литературе отсутствуют сравнительные данные количественного расчета теплового дрейфа ВОГ между упомянутыми выше моделями материала. Поэтому вопрос пригодности использования эффективной модели является открытым и представляет интерес для авторов настоящей статьи. Таким образом, целью данной работы являются расчет и сравнение с экспериментом кажущейся угловой скорости ВОГ с использованием структурно-неоднородной и однородной трансверсально-изотропной моделей волоконного контура.

## 1. ЭФФЕКТИВНЫЕ СВОЙСТВА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЫ

Исходя из структуры однонаправленного контура с гексагональной укладкой, материал можно считать однородной средой, которая имеет ось упругой симметрии, совпадающую с направлением волокна, т.е. является трансверсально-изотропной. Для определения трансверсально-изотропных свойств волоконного контура рассматривается (рис. 2а) элементарный представительный объем (ячейка периодичности) [17]. В предположении, что физико-механические свойства жилы, нагружающих стержней и оболочки волокна слабо отличаются друг от друга, оптическое волокно пред-

ставляется в виде однородного изотропного тела со свойствами чистого кварцевого стекла. Волокно, первичное и вторичное покрытия, компаунд вместе занимают объем  $V$ . Наружные границы ячейки периодичности обозначены  $S_p, S_b, S_t, S_g, S_l$  и  $S_r$ .

Для определения эффективных свойств трансверсально-изотропной модели материала записывается общая постановка для элементарного объема. Дифференциальные уравнения равновесия для ячейки периодичности (рис. 2а), занимающей объем  $V$ , с геометрическими размерами  $h_1, h_2, h_3$  имеют вид [18]

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{x} \in V, \quad (i, j = \overline{1,3}), \quad (1)$$

где  $\mathbf{x}$  — радиус-вектор точки с координатами  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $\sigma_{ij}$  — тензор напряжений, который связан с тензором малых деформаций

$$e_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(u_{i,j}(\mathbf{x}) + u_{j,i}(\mathbf{x})) \quad (2)$$

через соотношения Дюамеля–Неймана

$$e_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{E}[(1 + \nu)\sigma_{ij}(\mathbf{x}) - \delta_{ij}\nu\sigma_{kk}(\mathbf{x})] + \delta_{ij}\alpha\theta(\mathbf{x}). \quad (3)$$

Здесь  $u_i(\mathbf{x})$  — вектор перемещений,  $E = E(\mathbf{x})$ ,  $\nu = \nu(\mathbf{x})$  и  $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$  — модули упругости, коэффициенты Пуассона и коэффициенты линейного температурного расширения (КЛТР) волокна, покрытий и компаунда,  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера,  $\theta(\mathbf{x}) = T(\mathbf{x}) - T_0$  — изменение температуры,  $T(\mathbf{x})$  — температура,  $T_0$  — начальная температура.

Уравнение теплопроводности

$$(\lambda T_{,j}(\mathbf{x}))_{,j} = 0, \quad (4)$$

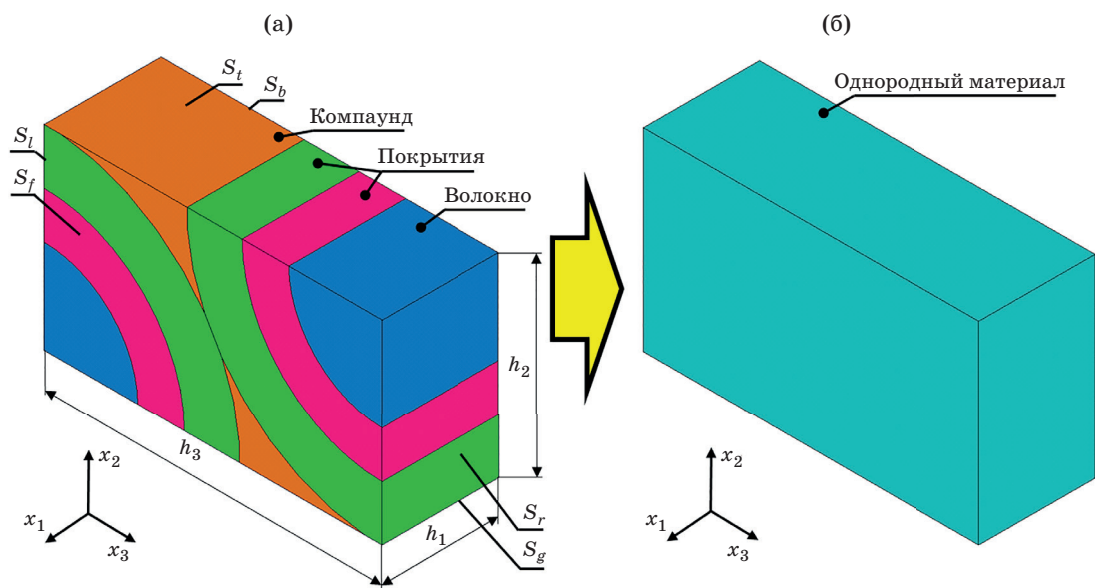


Рис. 2. Структурно-неоднородное (а) и однородное (б) представления элементарного объема.

Таблица 1. Физико-механические характеристики используемых материалов

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , МПа	$\nu$	$\lambda$ , Вт/(м К)	$c$ , Дж/(кг К)	$\alpha$ , ppm/К
Волокно	2200	74000	0,17	1,4	750	0,55
Первичное покрытие	990	1,2	0,4982	0,18	2400	660
Вторичное покрытие	1130	950	0,33	0,25	1500	40
Компаунд	1140	3000	0,33	0,34	1200	40

где  $\lambda = \lambda(\mathbf{x})$  — коэффициенты теплопроводности волокна, покрытий и компаунда.

Физико-механические характеристики оптического волокна, покрытий и компаунда приведены в табл. 1.

### 1.1. Упругие константы

Для пяти упругих констант решается задача (1)–(3) без изменения температуры  $T(\mathbf{x}) = T_0(\mathbf{x})$  с граничными условиями

– в случае растяжения вдоль оси  $x_1$

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= U_0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_f, \\ u_1(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_b, \\ u_2(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_t \cup S_g, \\ u_3(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_l \cup S_r, \end{aligned} \quad (5)$$

где  $U_0$  — заданное перемещение,

– в случае растяжения вдоль оси  $x_2$

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_f \cup S_b, \\ u_2(\mathbf{x}) &= U_0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_t, \\ u_2(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_g, \\ u_3(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_l \cup S_r, \end{aligned} \quad (6)$$

– в случае растяжения вдоль оси  $x_3$

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_f \cup S_b, \\ u_2(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_t \cup S_g, \\ u_3(\mathbf{x}) &= U_0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_r, \\ u_3(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_l, \end{aligned} \quad (7)$$

– в случае сдвига вдоль осей  $x_1$  и  $x_2$

$$\begin{aligned} u_i(\mathbf{0}, x_2, x_3) &= u_i(h_1, x_2, x_3), \quad i = \overline{1,3}, \\ u_1(\mathbf{x}) &= U_0, \quad u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma_{12}(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma_{23}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} &\in S_t, \\ u_1(\mathbf{x}) &= 0, \quad u_2(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma_{12}(\mathbf{x}) = 0, \quad \sigma_{23}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} &\in S_g, \\ u_3(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \sigma_{23}(\mathbf{x}) = 0, & \mathbf{x} &\in S_l \cup S_r. \end{aligned} \quad (8)$$

Переход к средним напряжениям и деформациям однородного тела осуществляется посредством равенств

$$\sigma_{ij}^* = \frac{1}{V} \int_V \sigma_{ij}(\mathbf{x}) dV, \quad e_{ij}^* = \frac{1}{V} \int_V e_{ij}(\mathbf{x}) dV, \quad (9)$$

где параметры, имеющие в верхнем индексе астериск, относятся к элементарной ячейке с эффективными характеристиками (рис. 2б).

По средним напряжениям и деформациям (9) определяются жесткости  $C_{ijkl}^*$  трансверсально-изотропного тела, причем  $C_{1111}^*$  — из решения краевой задачи (1)–(3), (5),  $C_{1122}^*$  и  $C_{2222}^*$  — из решения краевой задачи (1)–(3), (6),  $C_{2233}^*$  — из решения краевой задачи (1)–(3), (7),  $C_{1212}^*$  — из решения краевой задачи (1)–(3), (8)

$$\begin{aligned} C_{1111}^* &= \frac{\sigma_{11}^*}{e_{11}^*}, & C_{1122}^* &= \frac{\sigma_{11}^*}{e_{22}^*}, & C_{2222}^* &= \frac{\sigma_{22}^*}{e_{22}^*}, \\ C_{2233}^* &= \frac{\sigma_{22}^*}{e_{33}^*}, & C_{1212}^* &= \frac{\sigma_{12}^*}{e_{12}^*}. \end{aligned}$$

Переход к техническим константам осуществляется с помощью соотношений [19]

$$\begin{aligned} E_1^* &= C_{1111}^* - \frac{2(C_{1122}^*)^2}{C_{2222}^* + C_{2233}^*}, \\ E_2^* &= \frac{[C_{1111}^*(C_{2222}^* + C_{2233}^*) - 2(C_{1122}^*)^2](C_{2222}^* - C_{2233}^*)}{C_{1111}^*C_{2222}^* - (C_{1122}^*)^2}, \\ \nu_{12}^* &= \frac{C_{1122}^*}{C_{2222}^* + C_{2233}^*}, \\ \nu_{23}^* &= \frac{C_{1111}^*C_{2233}^* - (C_{1122}^*)^2}{C_{1111}^*C_{2222}^* - (C_{1122}^*)^2}, \\ G_{12}^* &= C_{1212}^*, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $G_{12}^*$  — модуль сдвига.

### 1.2. Коэффициент линейного температурного расширения

Для определения КЛТР решается задача (1)–(3) при воздействии однородного поля изменения температуры  $\theta(\mathbf{x}) = \theta_0$  с заданными граничными условиями

$$\begin{aligned} u_1(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_f \cup S_b, \\ u_2(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{12}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_t \cup S_g, \\ u_3(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{13}(\mathbf{x}) &= 0, & \sigma_{23}(\mathbf{x}) &= 0, & \mathbf{x} &\in S_l \cup S_r. \end{aligned} \quad (11)$$

После решения задачи (1)–(3), (11) с однородным полем изменения температуры  $\theta_0$  определяются средние напряжения и деформации (9). Затем осуществляется расчет КЛТР трансверсально-изотропной модели материала с использованием ранее найденных констант (10) по выражениям [19]

$$\alpha_{11}^* = \frac{1}{\theta_0} \left( -\frac{1}{E_1^*} \sigma_{11}^* + \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} (\sigma_{22}^* + \sigma_{33}^*) \right),$$

$$\alpha_{22}^* = \frac{1}{\theta_0} \left( \frac{\nu_{12}^*}{E_1^*} \sigma_{11}^* - \frac{1}{E_2^*} \sigma_{22}^* + \frac{\nu_{23}^*}{E_2^*} \sigma_{33}^* \right). \quad (12)$$

### 1.3. Теплопроводность

Для определения коэффициента теплопроводности решается задача (4) с граничными условиями – вдоль оси  $x_1$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T_b, \quad \mathbf{x} \in S_b, \\ T(\mathbf{x}) &= T_f, \quad \mathbf{x} \in S_f, \\ T_f &> T_b, \end{aligned} \quad (13)$$

– вдоль оси  $x_2$

$$\begin{aligned} T(\mathbf{x}) &= T_g, \quad \mathbf{x} \in S_g, \\ T(\mathbf{x}) &= T_t, \quad \mathbf{x} \in S_t, \\ T_t &> T_g. \end{aligned} \quad (14)$$

Переход к среднему тепловому потоку осуществляется посредством равенства

$$Q_j^* = \frac{1}{V} \int_V -\lambda T_{,j}(\mathbf{x}) dV. \quad (15)$$

Из средних тепловых потоков  $Q_1^*$  и  $Q_2^*$  (15) после решения уравнения (4) с граничными условиями (13) и (14) определяются коэффициенты  $\lambda_{11}^*$  и  $\lambda_{22}^*$  соответственно

$$\lambda_{11}^* = -\frac{Q_1^* h_1}{T_f - T_b}, \quad \lambda_{22}^* = -\frac{Q_2^* h_2}{T_t - T_g}. \quad (16)$$

### 1.4. Удельная теплоемкость

Расчет эффективной удельной теплоемкости проводится по формуле

$$c^* = \frac{\int_V c \rho dV}{\int_V \rho dV}, \quad (17)$$

где  $c = c(\mathbf{x})$  и  $\rho = \rho(\mathbf{x})$  — удельные теплоемкости и плотности массы волокна, покрытий и компаунда.

### 1.5. Плотность массы

Эффективная плотность массы вычисляется по отношению

$$\rho^* = \frac{1}{V} \int_V \rho dV. \quad (18)$$

### 1.6. Расчет эффективных характеристик

Для численного решения всех поставленных задач был построен трехмерный конечно-элементный аналог ячейки периодичности в среде ANSYS. Дискретизация расчетной геометрии выполнена с помощью конечных элементов, имеющих квадратичную аппроксимацию функции формы. В качестве перемещения для условий (5)–(8) использовано значение  $U_0 = h_1/100$ . Изменение температуры для задачи (1)–(3), (11) —  $\theta_0 = 1$  °С. Температуры для задачи (4), (13)–(14) —  $T_f = T_t = 1$  °С,  $T_b = T_g = 0$  °С. Результаты определения эффективных характеристик представлены в табл. 2.

При оценке сходимости численного решения задач проводилось сгущение сетки. Первоначальное количество узлов сетки составило около 20 тыс. В дальнейшем число узлов было увеличено примерно до 200 тыс. Диаграмма относительных погрешностей эффективных характеристик (10), (12), (16) представлена на рис. 3. Из рисунка видно, что физико-механические свойства при увеличении количества узлов сетки на порядок имеют относительную погрешность менее 0,5%.

## 2. ТЕПЛОЙ ДРЕЙФ ВОГ

Для теоретического и экспериментального исследования теплового дрейфа рассматривается волоконный контур в специальном приспособлении (рис. 4), которое состоит из двух дюралевых корпусных деталей — крышки и основания. Контур

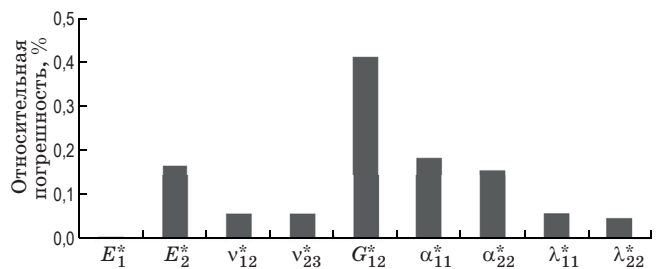
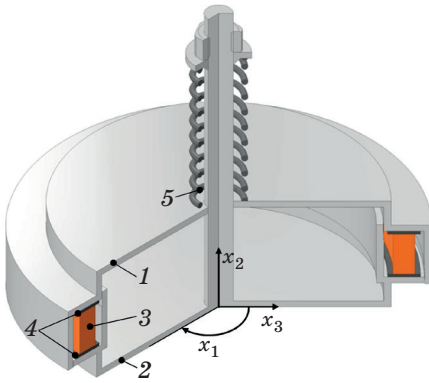


Рис. 3. Относительные погрешности эффективных характеристик.

Таблица 2. Эффективные физико-механические характеристики трансверсально-изотропного тела

$E_1^*$ , ГПа	$E_2^*$ , МПа	$\nu_{12}^*$	$\nu_{23}^*$	$G_{12}^*$ , МПа	$\alpha_{11}^*$ , ppm/К	$\alpha_{22}^*$ , ppm/К	$\lambda_{11}^*$ , Вт/(м К)	$\lambda_{22}^*$ , Вт/(м К)	$c^*$ , Дж/(кг К)	$\rho^*$ , кг/м <sup>3</sup>
16,1	336	0,664	0,336	156	2,38	191	0,479	0,308	1390	1320



**Рис. 4.** Волоконный контур в приспособлении. 1 — крышка, 2 — основание, 3 — волоконный контур, 4 — прокладки, 5 — пружина.

в нем удерживается посредством резиновых прокладок. Пружина сжатия позволяет крышке перемещаться относительно основания вдоль оси вращения. Такая конструкция обеспечивает осесимметричное распространение тепла и минимизирует механические нагрузки на контур от сопряжения с корпусными деталями.

### 2.1. Функционал кажущейся угловой скорости

В 1996 г. авторы работы [20] впервые сделали предположение о существовании двух механизмов возникновения теплового дрейфа — термооптического и упругооптического.

Функционал кажущейся угловой скорости, учитывающий только термооптический эффект, есть [21]

$$\Omega_T(t) = \frac{1}{LD} \int_0^L n^2 \left( \dot{\epsilon}_{11}^T(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial n}{n \partial T} \dot{T}(\mathbf{x}, t) \right) (L - 2l) dl, \quad (19)$$

где  $\dot{T}(\mathbf{x}, t)$  — скорость изменения температуры в жиле оптического волокна,  $\dot{\epsilon}_{11}^T(\mathbf{x}, t)$  — скорость изменения температурной деформации, действующей вдоль волокна,  $n$  и  $\partial n / \partial T$  — показатель преломления и термооптический коэффициент жилы оптического волокна,  $L$  — длина волокна в контуре,  $D$  — средний диаметр волоконного контура.

Функционал кажущейся угловой скорости, учитывающий упругооптический эффект, для этой системы координат (рис. 4) с учетом допущений [22] имеет вид [23]

$$\Omega_e(t) = \frac{1}{LD} \int_0^L n^2 \left( \dot{\epsilon}_{11}^e(\mathbf{x}, t) - \frac{n^2}{2} [(1 - \nu_f) p_\beta - \nu_f p_\alpha] \times \right. \\ \left. \times \dot{\epsilon}_{11}^e(\mathbf{x}, t) \right) (L - 2l) dl, \quad (20)$$

где  $\dot{\epsilon}_{11}^e(\mathbf{x}, t)$  — скорость изменения компоненты тензора упругих деформаций, действующей вдоль жилы оптического волокна,  $\nu_f$  и  $p_\alpha, p_\beta$  — коэффици-

**Таблица 3.** Оптические константы

$n$	$\partial n / \partial T$ , ppm/K	$p_\alpha$	$p_\beta$
1,458	11,4	0,122	0,271

циент Пуассона и упругооптические константы жилы оптического волокна.

Первые слагаемые в подынтегральных функциях (19) и (20) характеризуют скорости изменения длины волокна за счет теплового и упругого расширения соответственно. Вторые слагаемые описывают скорости изменения показателя преломления. Необходимо отметить, что ранее авторы в расчете теплового дрейфа [8] в функционале (19) не учитывали скорость температурных деформаций ввиду малости КЛТР в кварцевом стекле. Материал с эффективными характеристиками имеет в 4,3 раза больший КЛТР вдоль волокна, поэтому учет второго слагаемого в подынтегральной функции представляется необходимым.

В табл. 3 представлены коэффициент преломления, термооптическая и упругооптические константы жилы волокна.

### 2.2. Квазистационарная задача термоупругости

Формулы (19) и (20) для определения кажущихся угловых скоростей содержат неизвестные  $T$  и  $\dot{\epsilon}_{11}^e$ , для отыскания которых ставится квазистационарная задача термоупругости. Для объекта исследования (рис. 4) построен двумерный осесимметричный конечно-элементный аналог в программном комплексе ANSYS (рис. 5).

Волокно, покрытия, компаунд, резиновые прокладки, корпусные детали занимают объем  $V_p$ , а воздух —  $V_v$ . Граница между  $V_p$  и  $V_v$  обозначена как  $S_{pv}$ . Наружная граница деталей корпуса с окружающей средой —  $S$ . Полагается, что возмущающее тепловое поле изменяется медленно, вследствие чего возможно пренебречь инерционными членами в уравнениях движения и дилатационным членом в уравнении теплопроводности. Система уравнений несвязанной квазистационарной задачи термоупругости для анизотропного тела принимает вид [24]

$$\sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in V_p, \quad (i, j = \overline{1, 3}), \\ \sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = C_{ijkl} [\epsilon_{kl}(\mathbf{x}, t) - \alpha_{kl} \theta(\mathbf{x}, t)], \quad (k, l = \overline{1, 3}), \\ \epsilon_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} (u_{i,j}(\mathbf{x}, t) + u_{j,i}(\mathbf{x}, t)), \\ (\lambda_{ij} T_{,i}(\mathbf{x}, t))_{,j} = c \rho \dot{T}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in V_p \cup V_v, \quad (21)$$

где  $t$  — время. Для изотропных материалов тензор упругих констант  $C_{ijkl} = C_{ijkl}(\mathbf{x})$  определяется мо-

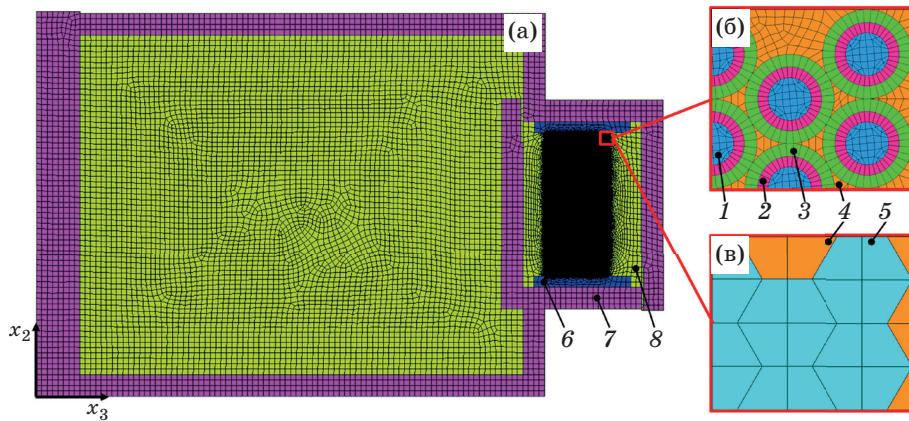


Рис. 5. Расчетная схема (а) с двумя представлениями волоконного контура — структурно-неоднородным (б) и однородным с эффективными характеристиками (в). 1 — волокно, 2 — первичное покрытие, 3 — вторичное покрытие, 4 — композит, 5 — материал с эффективными свойствами, 6 — прокладка, 7 — корпус, 8 — воздух.

дулем упругости  $E(\mathbf{x})$  и коэффициентом Пуассона  $\nu(\mathbf{x})$ ,  $\alpha_{kl} = \alpha(\mathbf{x})$ ,  $\lambda_{kl} = \lambda(\mathbf{x})$ .

При  $x_2 = 0$  ставятся граничные условия свободного опирания приспособления

$$u_2(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in (0, x_3). \quad (22)$$

На границах с воздухом и окружающей средой напряжения отсутствуют

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t)r_j = 0, \quad \mathbf{x} \in S_{pv} \cup S, \quad (23)$$

где  $r_j$  — направляющие косинусы вектора нормали к соответствующим поверхностям.

Для уравнения теплопроводности на всех наружных поверхностях приспособления используются граничные условия

$$-\lambda_{ij}T_{,i}(\mathbf{x}, t)r_i = \chi(T(\mathbf{x}, t) - T_c(\mathbf{x}, t)), \quad \mathbf{x} \in S, \quad (24)$$

где  $\chi = 13 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ К})$  — коэффициент теплоотдачи, определенный экспериментально для данной задачи ранее [25],  $T_c(\mathbf{x}, t)$  — температура окружающей среды.

Начальное условие уравнения теплопроводности

$$T(\mathbf{x}, 0) = T_0, \quad \mathbf{x} \in V_p \cup V_v. \quad (25)$$

Физико-механические характеристики корпусных деталей, резиновых прокладок и воздуха приведены в табл. 4.

### 3. РАСЧЕТ СКОРОСТЕЙ ТЕМПЕРАТУР И ДЕФОРМАЦИЙ

Для дискретизации расчетной геометрии (рис. 5) выбран конечный элемент с тремя степенями свободы ( $u_2$ ,  $u_3$  и  $T$ ), учитывающий осевую симметрию и имеющий квадратичную аппроксимацию функций формы. В качестве воздействия  $T_c(\mathbf{x}, t)$  задается термопереход от 20 до 60 °С со скоростью изменения температуры  $\dot{T}_c(\mathbf{x}, t) = 1 \text{ °С}/\text{мин}$  с последующей часовой выдержкой при максимальной температуре. Шаг интегрирования по времени составляет 50 с.

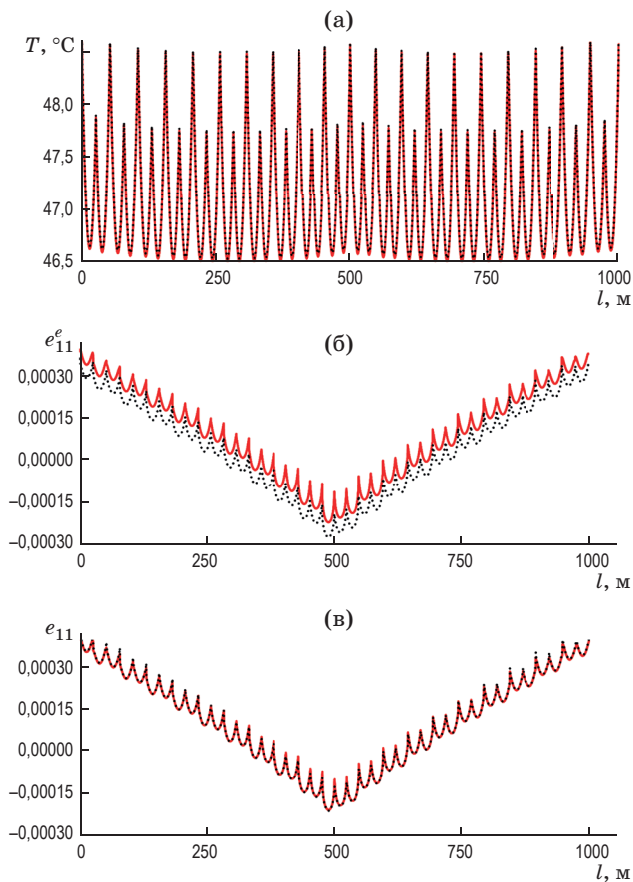
Расчет выполнен на рабочей станции с центральным процессором Intel Xeon E5-2643 v3 (6 ядер по 3,4 ГГц) и 64 ГБ оперативной памяти. В табл. 5 сведена информация о количестве узлов конечно-элементной сетки, использовании максимального количества оперативной памяти и времени интегрирования одного шага для обеих моделей материала контура.

Таблица 4. Физико-механические характеристики используемых материалов

Материал	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$E$ , МПа	$\nu$	$\lambda$ , Вт/(м К)	$c$ , Дж/(кг К)	$\alpha$ , ppm/К
Корпус	2800	72200	0,3	115	900	28
Прокладка	1100	4,9	0,4997	0,25	2000	300
Воздух	1,2	—	—	0,025	1000	—

Таблица 5. Характеристики вычислительного процесса

Материал контура	Количество узлов, тыс. шт	Оперативная память, ГБ	Время шага, с
Структурно-неоднородный	1400	33,5	111
Однородный трансверсально-изотропный	90	2,9	12



**Рис. 6.** Распределение температур (а), упругих (б) и полных (в) деформаций вдоль волокна при  $t = 40$  мин. Красной сплошной линией изображены результаты для структурно-неоднородной модели, черной пунктирной — для однородной трансверсально-изотропной.

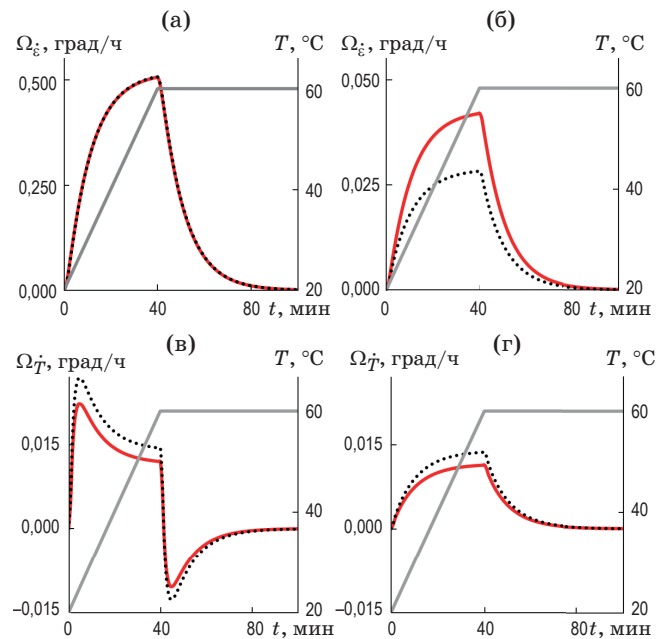
Результатами решения краевой задачи (21)–(25) являются поля температур и деформаций, которые снимаются из центра каждого волокна в соответствии со схемой намотки волоконного контура. В настоящей работе исследуются квадрупольная и октупольная схемы намотки, с конфигурациями которых читатель может познакомиться в работе [9]. На рис. 6 представлены распределения температуры  $T(\mathbf{x})$ , упругой  $e_{11}^e(\mathbf{x})$  и полной деформаций  $e_{11}(\mathbf{x}) = e_{11}^e(\mathbf{x}) + e_{11}^T(\mathbf{x})$  по длине волокна квадрупольной схемы намотки в момент времени  $t = 40$  мин с использованием двух представлений материалов волоконного контура. Из рисунка видно, что кривые температур структурно-неоднородной и однородной моделей контура хорошо согласуются друг с другом. Аналогичная ситуация наблюдается с кривыми полных деформаций для двух исследуемых моделей.

#### 4. РАСЧЕТ КАЖУЩЕЙСЯ УГЛОВОЙ СКОРОСТИ

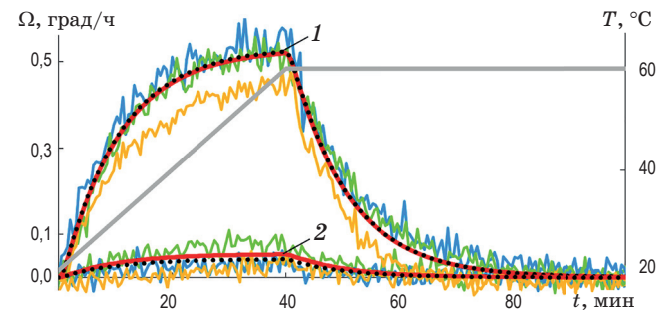
Переход к скоростям температур  $\dot{T}(\mathbf{x}, t)$  и деформаций  $\dot{e}_{11}^e(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{e}_{11}^T(\mathbf{x}, t)$  с последующей подста-

новкой в функционалы (19)–(20) дают кажущиеся угловые скорости, вызванные термооптическим и упругооптическим эффектами (рис. 7).

Суммарные кажущиеся угловые скорости  $\Omega = \Omega_T + \Omega_e$  обеих моделей материала контура в сравнении с экспериментальными данными квадрупольной и октупольной схем волоконного контура приведены на рис. 8. Результаты эксперимента были сглажены методом скользящего среднего на интервале 30 с. Также из сигнала



**Рис. 7.** Кажущиеся угловые скорости, вызванные упругооптическим (а, б) и термооптическим (в, г) эффектами контуров с квадрупольной (а, в) и октупольной (б, г) схемами намотки. Красной сплошной линией изображены результаты для структурно-неоднородной модели, черной пунктирной — для однородной трансверсально-изотропной. Серой линией обозначено изменение температуры окружающей среды.



**Рис. 8.** Кажущиеся угловые скорости контуров с квадрупольной (1) и октупольной (2) схемами намотки. Красной сплошной линией изображены результаты для структурно-неоднородной модели, черной пунктирной — для однородной трансверсально-изотропной. Желтыми, зелеными и синими линиями изображены результаты экспериментов. Серая линия отражает изменение температуры окружающей среды.

была исключена постоянная составляющая скорости вращения Земли. Из рисунка видно, что обе модели материала адекватно описывают тепловой дрейф.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При расчете теплового дрейфа был осуществлен переход к трансверсально-изотропной модели материала структурно-неоднородного контура. Решение задачи термоупругости показало сходство по температурам и деформациям между моделя-

ми. Кажущиеся угловые скорости, вычисленные по разным моделям материала, имеют удовлетворительное совпадение. Найденные значения подтверждаются экспериментальными данными для квадрупольной и октупольной схем намотки волоконного контура. Для расчета с использованием эффективных свойств требуется в 11 раз меньше оперативной памяти и в 9 раз меньше времени. В связи с изложенным выше авторы предлагают использовать трансверсально-изотропную модель материала волоконного контура при моделировании теплового дрейфа ВОГ.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шереметьев А.Г.* Волоконный оптический гироскоп. М.: Радио и связь, 1987. 152 с.
2. *Lefevre H.C.* The fiber-optic gyroscope / 2<sup>nd</sup> ed. / Boston: Artech House, 2014. 343 p.
3. *Унтилов А.А., Егоров Д.А., Рупасов А.В и др.* Результаты испытаний волоконно-оптического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2017. Т. 25. № 3(98). С. 78–85
4. *Мешковский И.К., Мирошниченко Г.П., Рупасов А.В. и др.* Исследование влияния тепловых воздействий на работу волоконно-оптического датчика угловой скорости // XXI Санкт-Петербургская междунар. конф. по интегрированным навигационным системам. «Концерн «ЦНИИ «Электроприбор», 2014. С. 191–202.
5. *Вахрамеев Е.И., Галягин К.С., Ошивалов М.А. и др.* Методика численного прогнозирования и коррекции теплового дрейфа волоконно-оптического гироскопа // Изв. вузов. Приборостроение. 2017. Т. 60. № 1. С. 32–38.
6. *Драницына Е.В., Егоров Д.А., Унтилов А.А. и др.* Снижение влияния изменения температуры на выходной сигнал волоконно-оптического гироскопа // Гироскопия и навигация. 2012. № 4(79). С. 10–20.
7. *Галягин К.С., Ошивалов М.А., Савин М.А.* Учет пьезооптических эффектов при моделировании теплового дрейфа волоконно-оптического гироскопа // Вестник ПНИПУ. Механика. 2015. № 4. С. 55–71.
8. *Есипенко И.А., Лыков Д.А.* Математическая модель теплового дрейфа волоконно-оптического гироскопа и ее экспериментальная верификация // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Приборостроение. 2017. № 5. С. 31–46.
9. *Ling W., Li X., Xu Z., et al.* Thermal effects of fiber sensing coils in different winding pattern considering both thermal gradient and thermal stress // Opt. Commun. 2015. V. 356. P. 290–295. DOI: 10.1016/j.optcom.2015.08.002
10. *Вахрамеев Е.И., Галягин К.С., Ивонин А.С. и др.* Тепловой дрейф волоконного оптического гироскопа // Изв. вузов. Приборостроение. 2011. Т. 54. № 1. С. 32–37.
11. *Курбатов А.М., Курбатов Р.А.* Температурные характеристики чувствительных катушек волоконно-оптического гироскопа // Радиотехника и электроника. 2013. Т. 58. № 7. С. 735–742.
12. *Gao Z., Zhang Y., Wang G., et al.* Analysis and simulation for the thermal performance of the octupolar fiber coil // Opt. Eng. 2014. V. 53(1). P. 016114, 5 p.
13. *Ogut S., Osunluk B., Ozbay E.* Modeling of thermal sensitivity of a fiber optic gyroscope coil with practical quadrupole winding // Fiber Optic Sensors and Applications XIV. 09–13 April 2017, Anaheim, California, USA. SPIE. 2017. V. 10208. P. 1020806, 6 p.
14. *Schadt F., Mohr F.* Error signal formation in FOGs through thermal and elasto-optical environment influence on the sensing coil // Inertial Sensors and Systems Conf. 20–21 September 2011, Karlsruhe, Germany. P. 2.1–2.13.
15. *Гаспарян А.Г., Есипенко И.А.* Определение механических характеристик трансверсально-изотропного волоконного контура по изотропным свойствам компонентов // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2016. № 1. С. 57–67.
16. *Minakuchi S., Sanada T., Takeda N., et al.* Thermal strain in lightweight composite fiber-optic gyroscope for space application // J. Lightw. Technol. 2014. V. 33. № 12. P. 2658–2662.
17. *Barbero E.J.* Finite element analysis of composite materials using ANSYS® / 2<sup>nd</sup> ed. / Boca Raton: CRC Press, 2013. 366 p.
18. *Новацкий В.* Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.



19. Соколкин Ю.В., Ташкинов А.А. Механика деформирования и разрушения структурно-неоднородных тел. М.: Наука, 1984. 115 с.
20. Tirat O.F., Euvette J.-M. Finite element model of thermal transient effect in fiber optic gyro // Fiber Optic Gyros: 20<sup>th</sup> Anniversary Conf. 04–09 August 1996. Denver, CO, United States. SPIE. 1996. V. 2837. P. 230–238.
21. Shupe D.M. Thermally induced non-reciprocity in the fiber-optic interferometer // Appl. Opt. 1980. V. 19. № 5. P. 654–655.
22. Butter C.D., Hocker G.B. Fiber optics strain gauge // Appl. Opt. 1978. V. 17. № 18. P. 2867–2869.
23. Mohr F., Schadt F. Bias error in fiber optic gyroscopes due to elasto-optic interactions in the sensor fiber // 2<sup>nd</sup> European Workshop on Optical Fibre Sensors. 9 June 2004, Santander, Spain. SPIE. 2004. V. 5502. P. 410–413.
24. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости. М.: Мир, 1970. 256 с.
25. Есипенко И.А., Лыков Д.А. Численный расчет и экспериментальная верификация фиктивной угловой скорости волоконно-оптического гироскопа при нестационарном температурном воздействии на его контур // Вычисл. мех. сплошных сред. 2017. Т. 10. № 3. С. 313–323.