

ИТЕРАЦИОННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ БИНАРНОЙ МАРКОВСКОЙ СМЕСИ

© 2004 г. М. С. Носкова

Институт прикладной оптики НАН Белоруссии, г. Могилев, Белоруссия
E-mail: ipo@physics.belpak.mogilev.by

В рамках малоуглового приближения получено итерационное решение системы уравнений, описывающих среднее значение оптической передаточной функции бинарной марковской смеси.

Коды OCIS: 290.6800.

Поступила в редакцию 23.12.2003.

Многие природные рассеивающие среды (например атмосфера, океан, различные биоткани) имеют сложную стохастическую структуру, что заметно сказывается на их оптических свойствах. В классической теории переноса, как правило, подобные среды рассматривались как макрооднородные, т. е. предполагалось, что распределение частиц по пространству в них статистически однородно, однако для многих современных приложений требуется более точное описание взаимодействия излучения со средой. В последнее время большое внимание уделяется построению теории переноса излучения в многокомпонентных стохастических смесях, состоящих из двух или более несмешивающихся веществ (компонентов), имеющих случайную форму и сильно отличающиеся оптические параметры [1–3]. Точные аналитические решения этой проблемы существуют только для некоторых частных случаев (одномерной и плоской геометрий) [1–3], а разработка строгих численных процедур решения трехмерных стохастических задач сталкивается со значительными трудностями, поэтому с практической точки зрения представляет интерес разработка простых, хотя и приближенных, методов описания стохастического радиационного переноса.

Одной из упрощенных моделей стохастической смеси является бинарная марковская смесь (БМС) [1–5], описывающая перенос излучения в средах, состоящих из двух последовательно чередующихся несмешивающихся компонентов, каждый из которых имеет свой набор оптических характеристик: $f_i(\Omega; \Omega')$ – индикатрису рассеяния, $\sigma_i, k_i, \epsilon_i = \sigma_i + k_i$ и $\Lambda_i = \sigma_i/\epsilon_i$ – соответственно коэффициенты рассеяния, поглощения, экстинкции и вероятность выживания фотона i -го компонента (если в данной точке смеси находится первый компонент, индекс i принимает значение 1, если второй – то 2). Типичным примером среды, которую приближенно можно считать марковской, является разорванная облачность: фотон, пересекающий ее в произвольном направлении (рис. 1), проходит сквозь чередующиеся участки

облаков ($i = 1$) и межоблачное пространство ($i = 2$). Размеры этих участков в произвольном направлении Ω считаются случайными величинами, распределенными по закону Гаусса [1].

В работе рассмотрен перенос лазерного излучения в БМС в малоугловом приближении. Задача решается в рамках модели низкого порядка [1, 2], в которой интенсивность пучка представляет марковский случайный процесс, удовлетворяющий условию причинности. Этой модели соответствует среда, состоящая из компонентов с сильно вытянутыми вперед индикатрисами рассеяния.

Согласно [1–5], в БМС усредненная по ансамблю реализаций интенсивность излучения в точке r в направлении Ω

$$\langle I(r; \Omega) \rangle = p_1 I_1(r; \Omega) + p_2 I_2(r; \Omega), \quad (1)$$

где $p_i = l_i/(l_1 + l_2)$ – вероятность нахождения i -го компонента в произвольной точке смеси; l_1, l_2 – средние хорды компонентов, заданные вдоль оси z ($i, j = 1, 2, i \neq j$), $I_i(r; \Omega)$ – усредненные значения интенсивности при условии, что точка r находится в i -м компо-

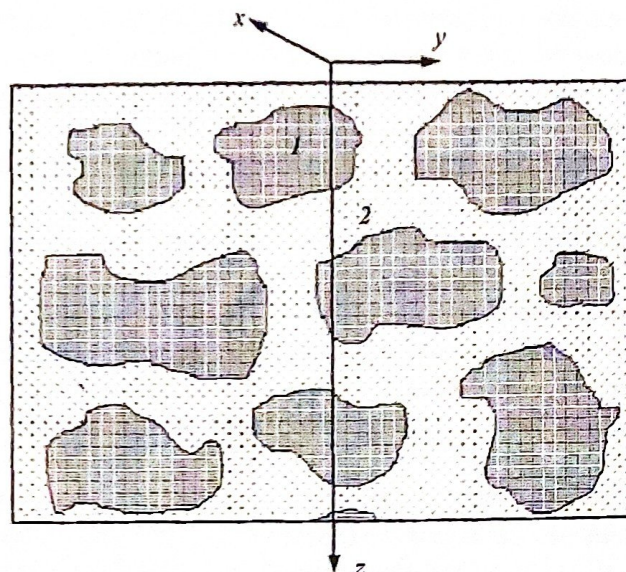


Рис. 1. Схематическое изображение бинарной марковской смеси.

ненте. $I_i(\mathbf{r}; \Omega)$ определяются из системы двух связанных уравнений [1–5]

$$\begin{aligned} \Omega \nabla p_i I_i(\mathbf{r}; \Omega) + \varepsilon_i^* p_i I_i(\mathbf{r}; \Omega) = \\ = \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_{4\pi} p_i I_i(\mathbf{r}; \Omega') f_i(\Omega; \Omega') d\Omega' - \\ - p_i I_i(\mathbf{r}; \Omega) / l_i + p_j I_j(\mathbf{r}; \Omega) / l_j, \end{aligned} \quad (2)$$

где $\nabla = i\partial/\partial x + j\partial/\partial y + k\partial/\partial z$ – оператор градиента, в котором i, j, k – единичные векторы декартовой системы координат, $\varepsilon_i^* = \varepsilon_i + \tilde{k}_i$ – эффективный коэффициент экстинкции, $\tilde{k}_i(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_{-2\pi} f_i(\mathbf{r}; \Omega; \Omega') d\Omega'$ –

коэффициент обратного рассеяния [2]. Пусть излучение падает на плоскую поверхность смеси вдоль ее нормали. С помощью стандартных приближений малоугловой теории

$$\begin{aligned} \Omega_z \approx 1, f_i(\Omega; \Omega') \approx f_i(\Omega - \Omega'), \\ \int_{4\pi} d\Omega'(\cdot) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} d\Omega'_x d\Omega'_y(\cdot), \end{aligned} \quad (3)$$

где Ω_x, Ω_y и Ω_z – проекции вектора Ω на оси декартовой системы координат, система (2) трансформируется в

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} p_i I_i(z, \rho, \Omega_\perp) + \\ + \Omega_\perp \frac{\partial}{\partial \rho} p_i I_i(z, \rho, \Omega_\perp) + \varepsilon_i^* p_i I_i(z, \rho, \Omega_\perp) = \\ = \frac{\sigma_i}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p_i I_i(z, \rho, \Omega'_\perp) f_i(\Omega_\perp - \Omega'_\perp) d\Omega'_\perp + \\ + \frac{p_i I_i(z, \rho, \Omega_\perp)}{l_i} - \frac{p_j I_j(z, \rho, \Omega_\perp)}{l_j}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $\rho = xi + yj$ – радиальный вектор, $\Omega_\perp = \Omega_x i + \Omega_y j$.

Применив к (4) преобразование Фурье по пространственным и угловым частотам ω и q , получаем систему уравнений [6, 7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} p_i F_i(z, \omega, q) - \left[\sigma_i Q_i(q + \omega z) - \varepsilon_i^* - \frac{1}{l_i} \right] \times \\ \times p_i F_i(z, \omega, q) - \frac{p_j F_j(z, \omega, q)}{l_j} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $F_i(z, \omega, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} I_i(z, \rho, \Omega_\perp) \exp(-i\omega\rho - i\mathbf{q}\Omega_\perp - \Omega_\perp \omega z) d\rho d\Omega_\perp$ – фурье-трансформанты интенсивности, $Q_i(q + \omega z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_i(\Omega) \exp(-i\tilde{\Omega}(q + \omega z)) d\Omega$ –

фурье-трансформанты индикатрис, $\tilde{i}$ – мнимая единица.

Для упрощения (5) используем малоугловую аппроксимацию индикатрисы Хенби–Гринштейна [8, 9]

$$\begin{aligned} f_i(\gamma) = \mu_i(1 - \mu_i) / \left((1 - \mu_i)^2 + \mu_i \gamma^2 \right)^{3/2}, \\ \int_0^\infty \gamma f_i(\gamma) d\gamma = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

где μ_i – средний косинус рассеяния. В этом случае фурье-трансформанты индикатрис

$$Q_i(q + \omega z) = \exp(-\alpha_i(q + \omega z)), \quad (7)$$

где $\alpha_i = (1 - \mu_i) / \sqrt{\mu_i}$, и система (5) сводится к

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} p_i F_i(z, \omega, q) - \left(\sigma_i \exp(-\alpha_i(q + \omega z)) - \varepsilon_i^* - \frac{1}{l_i} \right) \times \\ \times p_i F_i(z, \omega, q) - \frac{p_j F_j(z, \omega, q)}{l_j} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Определяя оптическую передаточную функцию (ОПФ) i -го компонента смеси как $T_i(z, \omega) = F_i(z, \omega, q = 0)$ [8, 9], приходим к системе уравнений, описывающих ОПФ БМС:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} p_i T_i(z, \omega) - \left(\sigma_i \exp(-\alpha_i \omega z) - \varepsilon_i^* - 1/l_i \right) \times \\ \times p_i T_i(z, \omega) - p_j T_j(z, \omega) / l_j = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Среднее значение ОПФ бинарной марковской смеси

$$\langle T(z, \omega) \rangle = p_1 T_1(z, \omega) + p_2 T_2(z, \omega). \quad (10)$$

Для системы (7) получено итерационное решение

$$\begin{aligned} p_i T_i^n(z, \omega) = \exp(-g_i(z, \omega)) \times \\ \times \left(\frac{1}{l_i} \int_0^z \exp(g_i(t, \omega)) p_j T_j^{n-1}(t, \omega) dt + C_i(\omega) \right), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left\langle T^n(z, \omega) \right\rangle = p_1 T_1^n(z, \omega) + p_2 T_2^n(z, \omega), \quad (12)$$

где n – порядковый номер итерации, $C_i(\omega) = p_i \times \exp(\sigma_i/\alpha_i \omega)$, $g_i(z, \omega) = (\sigma_i/\alpha_i \omega) \exp(-\alpha_i \omega z) + (\varepsilon_i^* + 1/l_i)z$, $\omega = |\omega|$. Итерация нулевого порядка

$$p_i T_i^0(z, \omega) = \exp(-g_i(z, \omega)) C_i(\omega). \quad (13)$$

В ходе исследования сходимости (11) показано, что количество итераций, необходимых для вычисления ОПФ БМС с заданной точностью, сильно зависит от размера средних хорд компонентов. Если $l_1 l_2 \geq 1$, достаточно 2–5 итераций, при этом $\left\langle T^n(z, \omega) \right\rangle < \langle T(z, \omega) \rangle$.

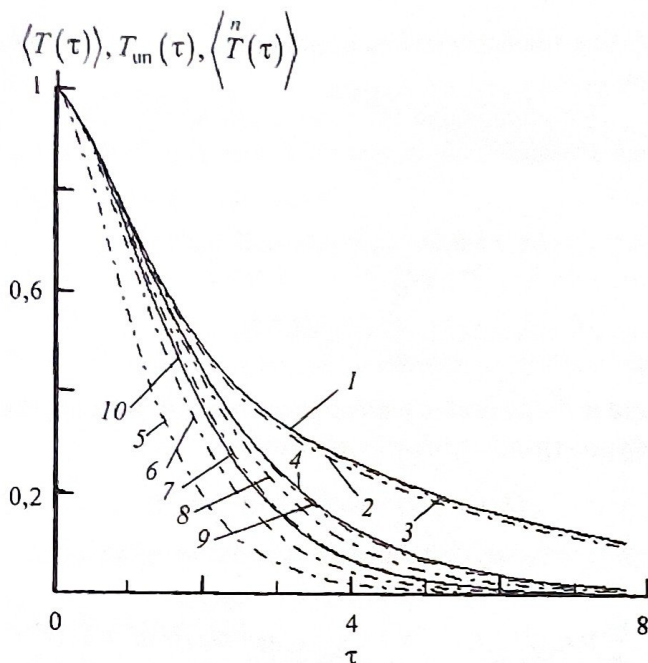


Рис. 2. Сравнение среднего значения ОПФ бинарной марковской смеси $\langle T(\tau) \rangle$, полученного численным решением системы (9), с итерациями различного порядка $\langle T^n(\tau) \rangle$ и с ОПФ эквивалентной однородной среды $T_{un}(\tau)$.

Если $l_1 l_2 < 1$, то для достижения приемлемой точности необходимо выполнить большее число итераций, но при возрастании n значения итераций $\langle T^n(z, \omega) \rangle$ быстро стремятся к $\langle T(z, \omega) \rangle$ и никогда его не превосходят.

В качестве примера на рис. 2 приведены результаты численных расчетов ОПФ БМС, оптические параметры которой соответствуют параметрам разорванной облачности [8].

При расчетах использованы следующие безразмерные параметры: $\tau = \langle \epsilon^* \rangle z$ – оптическая глубина, $\bar{l}_i = \langle \epsilon^* \rangle l_i$ – безразмерные средние хорды компонентов, $e_i = \epsilon_i^* / \langle \epsilon^* \rangle$ – величины относительных флуктуаций коэффициентов экстинкции, $\Lambda_i^* = \sigma / \epsilon_i^*$ – эффективные вероятности выживания фотона, $\tilde{\omega} = \omega / \langle \epsilon^* \rangle$ – безразмерная пространственная частота.

Чтобы нагляднее оценить влияние стохастичности среды на ее передаточные характеристики, удобно сравнивать перенос излучения в БМС и в эквивалентной однородной среде [6, 7]. Под эквивалентной однородной средой понимается среда, состоящая, как и БМС, из частиц двух типов, но в отличие от БМС равномерно перемешанных друг с другом. Ее оптические параметры равны усредненным параметрам БМС: $\langle \epsilon^* \rangle = p_1 \epsilon_1^* + p_2 \epsilon_2^*$, $\langle \sigma \rangle = \sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2$, $\langle k^* \rangle = k_1^* p_1 + k_2^* p_2$, $\langle \Lambda^* \rangle = \langle \sigma \rangle / \langle \epsilon^* \rangle$, $\langle \phi^2 \rangle = \langle \sigma_1 \langle \phi_1^2 \rangle p_1 + \sigma_2 \langle \phi_2^2 \rangle p_2 \rangle / \langle \sigma \rangle$, где $\langle \phi_i^2 \rangle = 2(1 - \mu_i) -$

второй момент индикатрисы рассеяния i -го компонента. ОПФ эквивалентной однородной среды вычисляется по формуле

$$T_{un}(\tau, \tilde{\omega}) = \exp \left(- \langle \Lambda^* \rangle \frac{\exp(-\langle \alpha \rangle \tilde{\omega} \tau) - 1}{\langle \alpha \rangle \tilde{\omega}} - \tau \right). \quad (14)$$

На рис. 2 кривая 1 соответствуют среднему значению ОПФ $\langle T(\tau) \rangle$, полученному численным решением системы (9) при $\langle \epsilon^* \rangle = 16$, $e_1 = 30/16$, $e_2 = 2/16$, $\mu_1 = 0,7$, $\mu_2 = 0,95$, $\tilde{\omega} = 10$, $\Lambda_1^* = 0,9$, $\Lambda_2^* = 0,9$, $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 8$. Кривые 2 и 3 – соответственно первая

и вторая $\langle T^n(\tau) \rangle$ итерации, рассчитанные по формулам (11) и (12). Как видно, при $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 8$ уже вторая итерация почти совпадает с кривой 1.

Кривая 4 соответствуют среднему значению $\langle T(\tau) \rangle$ для БМС с теми же параметрами, что и кривая 1, но при $\bar{l}_1 = \bar{l}_2 = 2$. Кривые 5–9 – соответственно 1, 2, 3, 4 и 5-я итерации $\langle T^n(\tau) \rangle$. Кривая 10 – ОПФ эквивалентной однородной среды $T_{un}(\tau)$ для приведенных выше параметров.

Таким образом, результаты численных расчетов подтверждают тот факт, что чем больше размеры средних хорд компонентов смеси, тем меньшее количество итераций необходимо для вычисления ОПФ бинарной марковской смеси с заданной точностью.

Кроме того, сравнение кривых 1 и 4 с кривой 10 показывает, что ОПФ бинарной марковской смеси сильно зависит от размера средних хорд компонентов и может существенно отличаться от ОПФ эквивалентной однородной среды. Это обстоятельство необходимо учитывать при решении ряда прямых и обратных задач спектроскопии рассеивающих сред.

ЛИТЕРАТУРА

1. Pomraning G.C. Linear Kinetic Theory and Particle Transport in Stochastic Mixtures. Singapore: World Scientific Publishing, 1991. 250 p.
2. Valentyuk A.N. Stochastic radiative transfer and causality condition // Journal of Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1995. V. 53. № 6. P. 693–704.
3. Valentyuk A.N. Stochastic radiative transfer in M-component markovian mixtures // Journal of Quant. Spectr. Radiat. Transfer. 1998. V. 60. № 6. P. 1069–1086.
4. Помранинг А.Г. Асимптотические уравнения переноса излучения в атмосфере с частичной облачностью // Оптика атмосферы и океана. 1996. Т. 9. № 1. С. 14–29.
5. Помранинг А.Г. Взаимодействия облако–радиация: модель Титова и другие модели // Оптика атмосферы и океана. 1999. Т. 12. № 3. С. 215–221.

6. Noskova M., Valentyuk A. Stochastic laser-beam transfer through a binary markovian mixture // J. Appl. Opt. 1997. V. 36. № 30. P. 325–331.

7. Валентюк А.Н., Носкова М.С. Угловая структура лазерного излучения в бинарной марковской смеси //

ЖПС, 1999, Т. 66. № 1. С. 36–42.

8. Валентюк А.Н., Предко К.Г. Оптическое изображение при дистанционном наблюдении. Минск, 1991. 359 с.

9. Зега Э.П., Иванов А.П., Кацев И.Л. // Перенос изображения в рассеивающей среде. Минск, 1985. 327 с.