УДК 535.1 534.2 537.87

СТРУКТУРА ПОЛЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ В ОКРЕСТНОСТИ ФОКУСА

М. В. Лукашова, канд. физ.-мат. наук; **Ю. А. Толмачев**, доктор физ.-мат. наук

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург

E-mail: yurii.tolmach@rambler.ru, frolen-maria@yandex.ru

Представлены элементы теории и результаты анализа пространственного распределения характеристик поля в окрестности фокуса для входного импульса в виде гармонического колебания с гауссовой огибающей. Параметры сигнала варьируются от ультракороткого до квазимонохроматического импульса. Демонстрируется развитие во времени входного импульса и краевой волны. Показано, что при эффективном числе колебаний более 3–5 структура поля в фокальной плоскости приближается к таковой для монохроматической волны.

Ключевые слова: *дельта-функция, импульсный отклик, ультракороткий импульс, структура поля в фокусе.*

Коды OCIS: 320.0320, 050.1960, 110.1650, 110.6915, 110.7170

Поступила в редакцию 07.04.2011

Введение

Интенсивно развивающиеся в последние десятилетия исследования нелинейного преобразования волнового поля различными оптическими (в широком смысле слова) системами не могут и не должны заслонять совершенствование методов описания линейного взаимодействия. Нелинейность материалов, проявляющаяся в полях высокой интенсивности, приводит к серьезной модификации пространственно-временной структуры волновых полей, однако, первым этапом подобного исследования, по нашему мнению, должен быть ее анализ именно в линейном приближении. Такой анализ позволяет указать положение областей концентрации энергии волн, требующих особого внимания при проведении более глубоких и детальных расчетов. Проблема особенно остро стоит сегодня, когда в физике и технике во все больших масштабах используются волновые процессы регулярного и псевдослучайного типа с очень широким спектром.

Свойство линейности оптической системы позволяет представить падающую на нее волну в виде суммы более простых составляющих, отдельно изучить трансформацию каждого компонента при взаимодействии с исследуемой системой и сложить затем полученные отклики. Традиционно используется разложение входного сигнала на монохроматические волны [1], которое является удачным для квазимонохроматических процессов, но теряет свою привлекательность при изучении ультракоротких импульсов. Между тем, и в акустике, и в оптике при решении множества научных и технических задач используются генераторы ультракоротких импульсов, формирующие сигналы, состоящие из одного или нескольких колебаний. Прямой перенос понятий, сформировавшихся в оптике квазимонохроматических процессов, возможен, но он оказывается малопродуктивным из-за громоздкости сопутствующих математических преобразований, подобно замене умножения многократным сложением.

На протяжении последних 20 лет мы развиваем заложенный еще в 1961 году [1] метод, когда пространственно-временное распределение поля волны исследуется с помощью представления об идеальном сигнале в виде дельта-импульса $\Psi(r,t)=\delta(t-r/c)$. Если воздействие оптической системы на входной сигнал описывается линейным оператором $L\{...\}$ и если в некоторой точке пространства P найден импульсный отклик $V(P,\ t)$ этой системы $V(P,\ t) = L\{\delta(t)\}$, то ее реакцию на любой физически осуществимый сигнал $\varphi(t)$ можно вычислить как свертку

$$\Psi(P,t) = L\{\varphi(t)\} = V(P,t) \otimes \varphi(t), \qquad (1)$$

где символом $\otimes$ обозначена операция свертки.

Описанный прием хорошо известен в теории линейных операторов и используется во многих разделах физики, в том числе в радиофизике и электродинамике. Работы [2–4] иллюстрируют удобство и простоту импульсного метода в применении к решению классических задач оптики. Относительно малая доступность статьи [5] и диссертационной работы [6], в которых техника соответствующих вычислений была описана подробно, требует остановиться на особенностях решения задачи о дифракции сходящейся сферической волны на круглом отверстии.

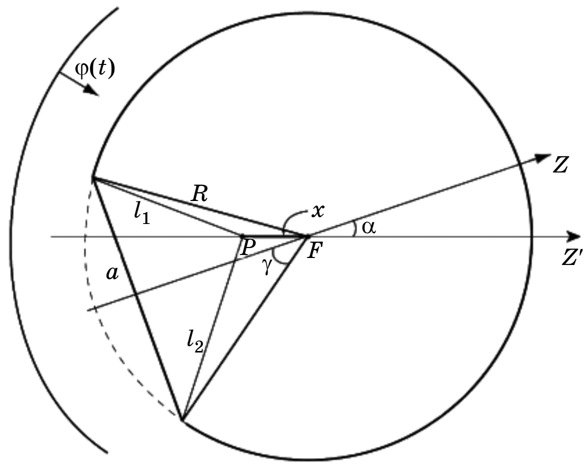

Рис. 1. Сферический сходящийся импульс $\varphi(t)$ дифрагирует на круглом отверстии в сферическом экране. Точка наблюдения P выбрана произвольно внутри сферы.

Фокусировка электромагнитных волн в рамках импульсного метода

Рассматривалась задача о прохождении сферической сходящейся волны сквозь круглое отверстие. Для удобства вычислений можно считать, что отверстие расположено в сферическом экране (рис. 1), т. е. исследуется дифракция сферической сходящейся волны на отверстии радиуса a в сферическом экране радиуса R, центр сферы принят за начало координат. В рамках импульсного метода на первом этапе необходимо найти реакцию этой системы на сферический сходящийся дельта-импульс вида

$$V_{sph}(\rho,t) = \frac{R}{\rho}\delta\left(t - \frac{R-\rho}{c}\right), \qquad (2)$$

где ρ – текущий радиус волны. Начало отсчета времени выбрано так, что при $t = 0$ $\rho = R$, т. е. импульс достигает поверхности экрана и, соответственно, границ отверстия.

При вычислении импульсного отклика системы в произвольной точке наблюдения P пространства внутри сферы применялась теорема Кирхгофа, которая позволяет выразить поле в точке P через поле и его производную по нормали на поверхности S сферического экрана

$$V(P,t) = \\ = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_S \left\{[\nu]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{cr}\frac{\partial r}{\partial n}\left[\frac{\partial \nu}{\partial t}\right] - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \nu}{\partial n}\right]\right\} dS. \qquad (3)$$

Здесь r – расстояние от точки наблюдения P до текущей точки интегрирования на сфере. Значение ν электромагнитного поля на поверхности экрана есть нуль в тех точках, где присутствует экран, и описывается соотношением (2) в точках отверстия. В квадратные скобки заключены величины, взятые в момент времени $(t - r/c)$. Подчеркнем, что теорема Кирхгофа верна только в том случае, когда размер отверстия a гораздо больше максимальной длины волны λ в исходном волновом пакете, однако детальные расчеты, представленные М.К. Лебедевым на конференции Days on Diffraction в 2004 году, показали, что влияние длинноволновых компонентов поля импульса (2) невелико вплоть до расстояний порядка десятых долей радиуса отверстия.

Чтобы определить электромагнитную волну в точке P, требуется применить теорему Кирхгофа последовательно к каждой составляющей векторов напряженности электрического и магнитного полей. Обычно измеряется только интенсивность световой волны, поэтому в большинстве случаев световое поле достаточно выразить через некоторую скалярную функцию $\Psi(P,\ t)$ такую, что квадрат модуля этой функции равен интенсивности световой волны

$$\left|\Psi(P,t)\right|^2 = \frac{c}{4\pi}\left|E(P,t)H(P,t)\right|.$$

В нашей работе используется именно скалярный подход. Выражения (2), (3) и последующие, выведенные на их основе, записаны в формулировке для скалярных (в том числе акустических) волн.

Интеграл (3) для входного сигнала вида (2) был вычислен в работах [3, 5, 6]. Таким образом, был найден импульсный отклик круглого отверстия на сферическую сходящуюся дельта-волну. При этом, если в [3] был детально проанализирован сигнал только на оси симметрии системы, то в [5, 6] была изучена структура поля во всей сфере. Полученное решение распадалось на сумму двух компонентов: “проходящая” волна и “краевая”. Хотелось бы подчеркнуть, что если обычно в научной литературе говорится о том, что решение задачи Кирхгофа “можно представить” в виде суперпозиции проходящей и краевой волн, то в используемом нами приближении δ-волн решение всегда содержит два таких компонента.

Первый из них отличен от нуля только в области, освещенной в приближении геометрической оптики и совпадает по форме с (2), т. е. в освещенной области присутствует проходящая волна. Во всей области тени соответствующее слагаемое обращается в нуль.

Во всем пространстве сферы существует ограниченная в пространстве и времени краевая волна. Время, в течение которого соответствующий сигнал отличен от нуля, определяется расстоянием от точки наблюдения до самой близкой и самой дальней по отношению к ней точки круглого отверстия. Сигнал, соответствующий краевой волне, описывается соотношением

$$V_{edge}(P,t) = -\frac{cR}{\pi}\times \times\frac{(\cos\alpha-\cos\theta\cos\gamma)}{\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\theta-(\cos\gamma-\cos\theta\cos\alpha)^2}}\times \times\frac{\left[\Theta(t-l_1/c)-\Theta(t-l_2/c)\right]}{(ct-R+x)(R+x-ct)}. \quad (4)$$

Здесь $\cos\theta = \dfrac{R^2+x^2-c^2t^2}{2Rx}$, апертурный угол отверстия обозначен через γ, расстояния от точки наблюдения до ближней и дальней границ отверстия равны l_1 и l_2, угол между направлением из фокуса на центр отверстия (направлением оси симметрии) и на точку наблюдения есть α, расстояние от фокуса до точки наблюдения равно x (рис. 1). Координаты точки наблюдения (x, α) заданы в полярной системе координат, величина x положительна в любой точке внутри сферы. Символом Θ обозначена функция Хэвисайда:

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Границы области, освещенной краевой волной, движутся в пространстве со скоростью c, образуя расширяющийся тор. Распределение амплитуды поля внутри тороидальной поверхности со временем сжимается к оболочке, что позволяет приближенно описывать его при больших временах односторонней δ-функцией. На оси симметрии FZ системы распределение поля краевой волны имеет особенность: поле стягивается в точку, движущуюся вдоль оси со скоростью больше c. Эта точка догоняет проходящую волну в фокусе и за фокусом перегоняет ее. Указанная особенность аналогична отмеченной в [7, 8] для краевых волн в системах, обладающих явно выраженной простой симметрией.

Таким образом, полный импульсный отклик круглого отверстия на сходящуюся сферическую волну в освещенной области имеет вид (в области тени, как уже говорилось, слагаемое $V_{sph}=0$)

$$V(P,t) = V_{sph}(P,t)+V_{edge}(P,t) = \frac{R}{\rho}\delta\left(t-\frac{R-\rho}{c}\right) - -\frac{cR}{\pi}\frac{(\cos\alpha-\cos\theta\cos\gamma)}{\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\theta-(\cos\gamma-\cos\theta\cos\alpha)^2}}\times \times\frac{\left[\Theta(t-l_1/c)-\Theta(t-l_2/c)\right]}{(ct-R+x)(R+x-ct)}. \quad (5)$$

Введя время $\tilde{t}$, отсчитанное от момента прохода волны через фокус, импульсный отклик вблизи F на оси симметрии системы можно представить приближенно в простой форме

$$V(x,\tilde{t}) \approx \frac{R}{x}\left[\delta\left(\tilde{t}+\frac{x}{c}\right)-\delta\left(\tilde{t}+\frac{x}{c/\cos\gamma}\right)\right].$$

Отметим, что за точкой фокуса изменяется знак как проходящей, так и краевой волны. В самой точке F формируется сигнал вида

$$V(F) = \frac{a^2}{2cR}\delta'_t(t). \quad (6)$$

Фокусировка гармонического колебания, имеющего гауссову огибающую во времени

В соответствии с (1), если требуется исследовать фокусировку произвольного входного сигнала, то для вычисления амплитуды поля в окрестности фокуса тонкой линзы достаточно найти свертку импульсного отклика (5) и выбранного входного сигнала. Например, свертка импульсного отклика (5) с монохромати-

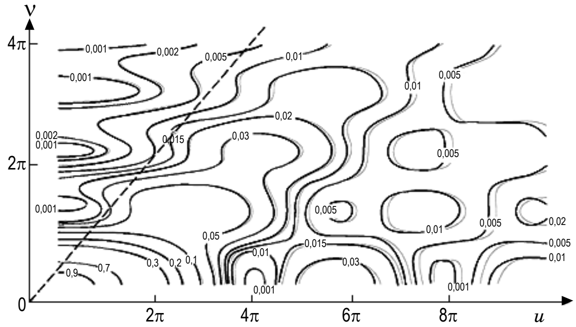

Рис. 2. Линии постоянной интенсивности в окрестности фокуса линзы (1/4 меридиональной плоскости). Цифры на линиях указывают долю от интенсивности в центре. Черные линии – результат нашего расчета, бледные линии – расчет с помощью функций Ломмеля. Пунктир – граница свет–тень. Вдоль осей отложены величины: $u = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)^2 z$ и $v = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{a}{R}\right)\sqrt{x^2 + y^2}$.

ческой волной приводит к давно известным в оптике результатам, относящимся к прохождению монохроматических волн сквозь тонкую линзу. При этом для точек наблюдения на оси симметрии системы удается получить эквивалентные выражения в аналитическом виде, а вне оси симметрии системы результаты совпадают в пределах погрешности численного расчета (рис. 2).

Одной из наиболее простых моделей реального ультракороткого импульса является гармоническое колебание с гауссовой огибающей

$$\varphi_1(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)\cos\left(2\pi\frac{t}{T}\right). \quad (7)$$

Применение подобной модели не вполне корректно, так как “площадь” соответствующего сигнала отлична от нуля (она обращается в нуль только в дискретных точках по τ), что невозможно, исходя из физических соображений, однако, при $\tau \to 0$ она обеспечивает переход к δ-функции.

Пользуясь общепринятым в оптике формализмом, для расчетов удобнее представить исходный сигнал $\varphi_1(t)$ в виде

$$\varphi_2(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{\tau^2}\right)\exp\left(i2\pi\frac{t}{T}\right). \quad (8)$$

Используя $\varphi_2(t)$ в качестве входного сигнала и выполнив все необходимые вычисления, достаточно будет рассмотреть вещественную часть результирующего отклика $\Psi_2(P,\ t)$, чтобы определить искомую скалярную амплитуду световой волны в любой момент времени t в произвольной точке наблюдения P: $\mathrm{Re}\left[\Psi_2(P,t)\right] = \Psi_1(P,t)$. Вторая, мнимая, составляющая полученного решения описывает скорость изменения сигнала, информация о которой совершенно необходима при расчете энергетических характеристик поля [9]. Разработанная нами программа позволяет найти в любой точке пространства внутри сферы амплитуду скалярной волны $\Psi_1(P,\ t)$, величину $A(P,t) = \sqrt{\mathrm{Re}^2\left[\Psi_2(P,t)\right] + \mathrm{Im}^2\left[\Psi_2(P,t)\right]}$, пропорциональную огибающей полученного сигнала и экспозицию $E(P) = \int_{-\infty}^{\infty} A^2(P,t)dt$ (использовалось усреднение по 50-ти периодам T). Результаты расчетов показали, что пространственное распределение экспозиции, качественно, повторяет распределение амплитуды $A(P)$, поэтому мы не приводим соответствующие иллюстрации.

Итак, входным сигналом является сигнал $\varphi_2(t)$, свертка функции $\varphi_2(t)$ с импульсным откликом (5) вычислялась средствами пакета Mathematica. Был построен ряд 3D-изображений, на которых плоскость OXY есть меридиональная плоскость (плоскость, которая проходит через центр отверстия и точку фокуса, вдоль вертикальной оси откладывались значения скалярной амплитуды $\Psi_1(t)$ светового поля, либо значения $A(P,\ t)$ и $E(P)$. Поскольку импульсный отклик (5) описывается только элементарными алгебраическими функциями (чем он весьма выгодно отличается от известных представлений реакции любой оптической системы на монохроматическую волну), свертка функции $\varphi_2(t)$ с импульсным откликом вычисляется быстро (на обычном персональном компьютере построение одного 3D-распределения происходит не более чем за 5 минут).

На рис. 3 приводится серия кадров, иллюстрирующая развитие во времени волны (7) при значении параметра τ = 0,2, моделирующем δ-импульс. Показано сечение сферы меридиональной плоскостью, содержащей ось симметрии. Волна распространяется слева – к центру. Угловая апертура входного отверстия 0,707 соответствует углу 45°, хорошо видимому на рисунке. Рис. 3а демонстрирует начальную стадию входа импульсной волны и зарождение тороидальной краевой волны. Детальный анализ пространственного распре-

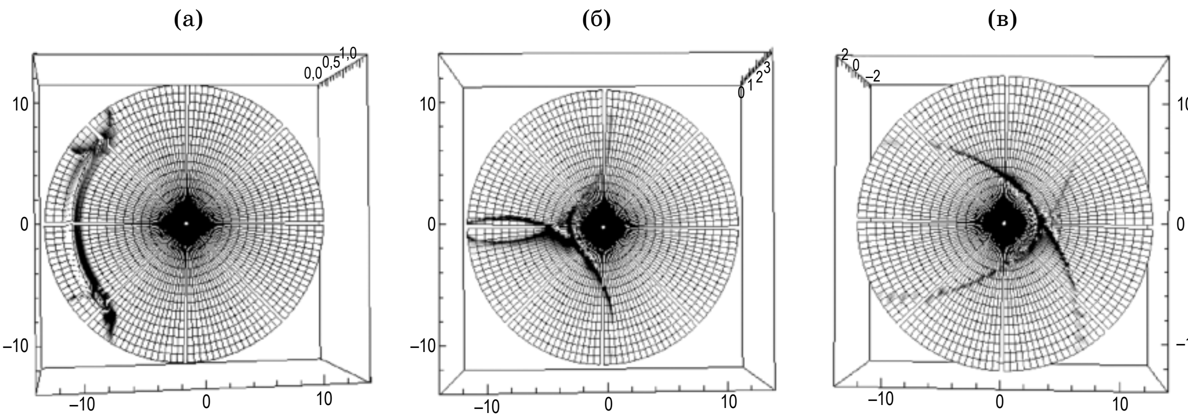

Рис. 3. Движение ультракороткого импульса внутри сферы с круглым отверстием, апертурный угол которого равен 45°, показано распределение величины $A(P)$. а – вход волны внутрь сферы, начало формирования краевых волн, б – образование δ-импульса краевой волны, догоняющего падающую волну, в – формирование расходящейся сферической волны из падающей сходящейся и отрыв краевого δ-импульса от падающего в окрестности оси симметрии.

деления амплитуды этой волны показывает, что по мере приближения к границе свет–тень со стороны тени она стремится к 1/2 от амплитуды падающей, то же происходит и при аналогичном движении в освещенной области, но знак краевой волны здесь противоположен знаку падающей. Амплитуда краевой волны уменьшается приблизительно обратнопропорционально расстоянию от границы свет–тень.

На следующем кадре хорошо видно образование самопересечения тора, приводящего к формированию на оси δ-импульса краевой волны. Таких точек две, вторая движется в направлении противоположном направлению распространения волны и на рис. 3б она уже вышла за пределы сферы. Появление двух таких особенностей следует и из развитой в [7] модели образования цилиндрических краевых волн при дифракции δ-волны на щели. Заметим, что амплитуда соответствующего импульса быстро спадает с ростом расстояния от центра как вследствие увеличения угла дифракции, так и из-за убывания амплитуды обратнопропорционально расстоянию от центра сферы. Суммарная амплитуда волн в "догоняющем" пересечении растет по мере приближения к фокусу и сравнивается в нем с амплитудой падающей волны, имея противоположный ей знак. Результатом является формирование в точке фокуса первой производной по времени от входящего сигнала.

Выше отмечалось, что δ-импульс краевой волны перемещается в пространстве со скоростью больше скорости света. На рис. 3в показана стадия, когда импульс прошел точку фокуса. Хорошо видно, что краевая волна теперь опережает падающую. Знак и падающей волны (после фокуса – расходящейся), и краевой на оси меняется на противоположный (рисунок это не отражает, так как показывает модуль амплитуды).

Рис. 4 иллюстрирует ситуацию в окрестности фокуса для момента времени $t = R/c$ и показывает, что вещественная часть свертки (8) с (5) – амплитуда волны – действительно описывается первой производной по времени. Непосредственно в F амплитуда поля равна нулю. В то же время, скорость изменения амплитуды – мнимая часть (8) – имеет в ней максимум (рис. 4б). Энергетическая характеристика волны – величина $A(F)$ – как и следовало ожидать, имеет в точке фокуса максимум (рис. 4в).

Простота приведенных на рис. 3 и 4 иллюстраций не должна вводить в заблуждение. При переходе к более сложным формам падающей волны картина дифракции резко усложняется, но разработанное программное обеспечение "справляется" с подобными задачами за то же самое время, как и в случае $\tau = 0{,}2$. В качестве примера на рис. 5 показано распределение в окрестности фокуса поля сигнала (8) при $\tau = 2$. Это значение взято для ил-

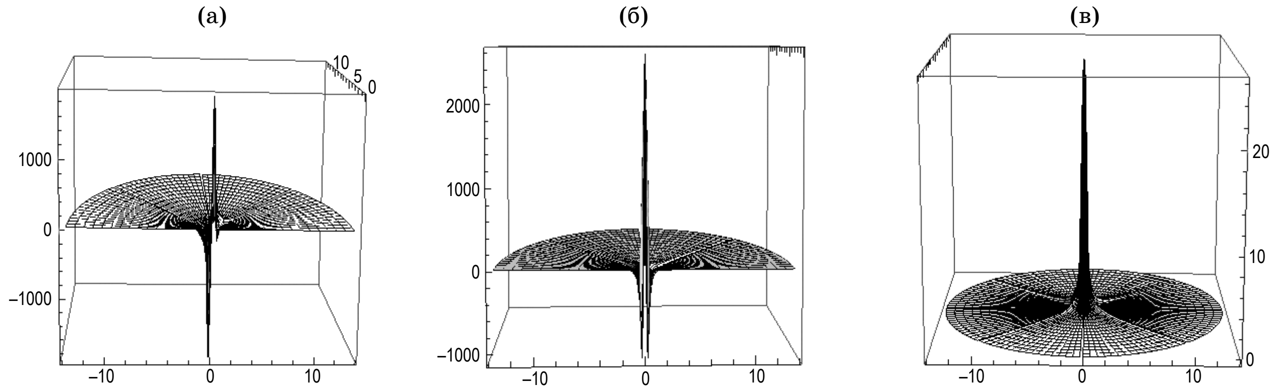

Рис. 4. Структура ультракороткого импульса ($\tau \le 0{,}2T$) в фокусе ($t = R/c$). а – вещественная часть свертки $\mathrm{Re}[\Psi_2(P,\ t)]$, б – мнимая часть свертки $\mathrm{Im}\ [\Psi_2(P,\ t)$, в – модуль амплитуды свертки $A(P,\ t)$.

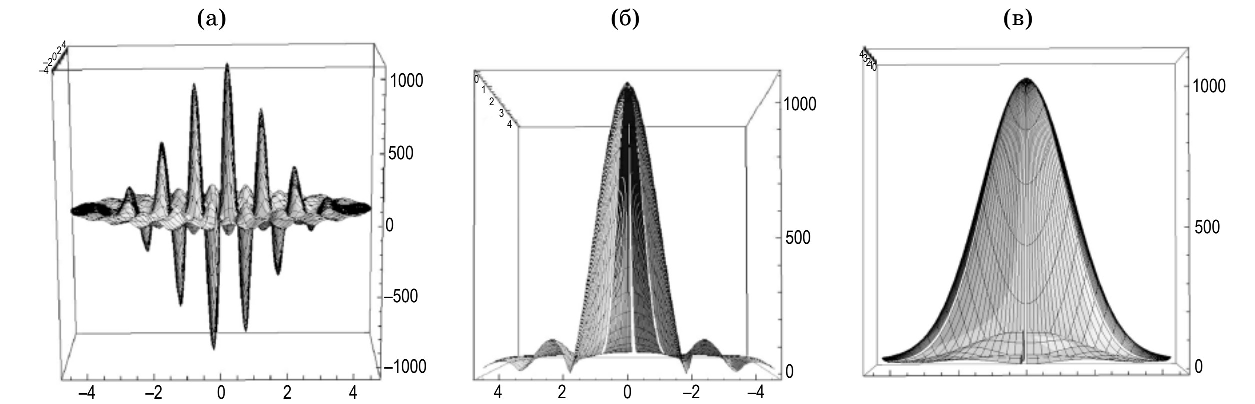

Рис. 5. Поле импульса вида (8) при $\tau = 2T$ в момент прохода центра импульса через фокус ($t = R/c$). а – вещественная часть свертки $\mathrm{Re}[\Psi_2(P,\ t)]$, б – модуль амплитуды свертки $A(P,\ t)$, сечение распределения в фокальной плоскости, в – модуль амплитуды свертки $A(P,\ t)$, сечение распределения в меридиональной плоскости.

люстрации высказанного выше утверждения, что уже при малых значениях τ сигнал ведет себя как квазимонохроматический. Сложная структура распределения амплитуды на рис. 5а приводит к распределению модуля амплитуды (ее квадрат – это освещенность) в сагиттальной плоскости, показанному на рис. 5б и почти совпадающему по положению первого нуля с расчетным для монохроматического колебания с центральной длиной волны спектрального распределения импульса. Гладкое продольное распределение освещенности (рис. 5в) отличается от расчетного $|\sin x/x|$, здесь уже сказывается конечная продольная величина волнового пакета.

Таким образом, при $\tau \le T$ распространяющийся в системе импульс можно назвать ультракоротким, но при $\tau > T$ световое поле “размывается” в пространстве, в окрестности фокуса появляются узловые точки интенсивности и явно выраженные побочные максимумы.

Заключение

Приведенные в работе результаты показывают, что импульсный метод анализа процессов дифракции и взаимодействия сигналов с оптической системой создает основу для экспрессного качественного анализа структуры волнового поля и позволяет дать полуколичественный ответ на вопросы об ее особенностях, оставаясь в рамках геометрической оптики. Разработанный алгоритм позволяет оперативно вычислять распределение скалярной амплитуды светового поля в окрестности фокуса сходящейся волны для частного случая гармонического колебания с гауссовой огибающей. С его помощью можно определять, например, расстояние от центра волнового пакета до первого минимума, что является немаловажным для технических задач, где нужно заранее сформулировать требования к точности исполнительных механизмов. Можно изучать влияние величины апертурного угла на качество поперечной и продольной фокусировки, влияние длительности падающего волнового пакета на "размывание" сигнала в окрестности фокуса и пр.

* * * * *

ЛИТЕРАТУРА

1. *Козина О.Г., Макаров Г.И.* Переходные процессы в акустических полях, создаваемых поршневой мембраной произвольной формы и при произвольном характере колебаний ее поверхности // Акуст. журн. 1961. Т. 7. № 1. С. 53–58.
2. *Лебедев М.К., Толмачев Ю.А.* О дифракции ультракороткого импульса на отверстии // Опт. и спектр. 2001. Т. 90. № 3. С. 457–463.
3. *Лебедев М.К., Толмачев Ю.А., Фроленкова М.В., Кытманов А.В.* Специфические особенности пространственно-временной структуры широкополосного сигнала в окрестности фокуса сходящейся сферической волны // Опт. и спектр. 2006. Т. 100. № 1. С. 129–135.
4. *Фроленкова М.В., Толмачев Ю.А.* Дифракция плоского ультракороткого импульса на круглом отверстии. Наклонное падение // Вестник СПбГУ. 2006. Сер. 4. В. 1. С. 142–146.
5. *Лебедев М.К., Толмачев Ю.А.* Импульсный метод в решении задач дифракции и интерференции. I. Дифракция ультракороткого импульса // Лазерные исследования в Санкт-Петербургском государственном университете. Третий выпуск / Под ред. В.Б. Смирнова, А.А. Петрова. СПб.: НИИ "Российский центр лазерной физики". 2004. С. 81–153.
6. *Фроленкова М.В.* Исследование импульсного метода решения задач дифракции скалярных волн и его применение для анализа работы различных оптических систем // Автореф. канд. дис. СПб.: СПбГУ, 2008. 19 с.
7. *Сулейменов И.Э., Лебедев М.К., Толмачев Ю.А.* Дифракция ультракороткого импульса на щели // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. № 1. С. 104–109.
8. *Saari P., Bowlan P., Valtna-Lukner H., Lõhmus M., Piksarv P., Trebino R.* Basic diffraction phenomena in time domain // Optics Express. 2010. V. 18. № 11. P. 11084.
9. *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. М.: Гос. изд-во техн.-теор. литературы. 1955. Т. 1. 475 с.