

РАСЧЕТ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРОИЗВОДСТВО ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 535.317

НЕСФЕРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В ОПТИКЕ И ПРОБЛЕМЫ ИХ АППРОКСИМАЦИИ

© 2004 г. В. А. Зверев, доктор техн. наук; Г. Э. Романова

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики,
Санкт-Петербург

Рассмотрены абберационные свойства несферических поверхностей, образованных вращением эвольвенты эволюты, имеющей вид окружности. Показано, что вращение произвольной кривой, несимметричной относительно нормали к ней в некоторой точке, вокруг этой нормали приводит к образованию двух поверхностей вращения, которые названы бинарной поверхностью. Получено точное уравнение несферической поверхности, эквидистантной параболоиду вращения. Полученное уравнение имеет вид степенного ряда в форме неявной функции.

Коды OCIS: 080.0080.

Поступила в редакцию 19.03.2004.

Поверхность вращения образуется вращением плоской кривой вокруг некоторой оси, например вокруг оси z . При этом в общем случае уравнение поверхности вращения определяется уравнением вида

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Поверхность вращения второго порядка принято определять уравнением

$$x^2 + y^2 = 2r_0 z - (1 + \sigma)z^2, \quad (1)$$

где σ – коэффициент “деформации” сферической поверхности, равный отрицательной величине квадрата эксцентриситета кривой второго порядка, т. е. $\sigma = -e^2$.

Расстояние между вершинами кривой, описываемой уравнением второго порядка, обозначим $O_1 O_2 = 2a$, а расстояние между геометрическими фокусами кривой обозначим $F_1 F_2 = 2c$. Эксцентриситет кривой $e = c/a$. При совмещении геометрических фокусов кривой в одной точке, т. е. при $c = 0$, уравнение (1) определяет сферическую поверхность, наиболее широко применяемую при композиции оптических систем. Поперечные aberrации третьего порядка в изображении точки, образованном лучами в меридиональной и сагиттальной плоскостях, соответственно равны [1]

$$\begin{aligned} -2n'\delta g' = & \sigma'_s (\sigma_i'^2 + \sigma_s'^2) S_I + (3\sigma_i'^2 + \sigma_s'^2) w S_{II} + \\ & + \sigma'_i w^2 (3S_{III} + J^2 S_{IV}) + w^3 S_V, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} -2n'\delta g' = & \sigma'_s (\sigma_i'^2 + \sigma_s'^2) S_I + \\ & + 2\sigma'_i \sigma'_s w S_{II} + \sigma'_s w^2 (S_{III} + J^2 S_{IV}), \end{aligned} \quad (3)$$

где σ'_s, σ'_i – апертурные углы, образованные крайними лучами осевого пучка с оптической осью в пространстве изображений в меридиональной и сагиттальной плоскостях; w – угол, образованный главным лучом с оптической осью в пространстве предметов (полевого угол).

При этом коэффициенты $S_I, \dots, S_V$ как функции углов α , образованных осевым виртуальным лучом с оптической осью, расстояний h и H от оптической оси до точек пересечения осевого и главного виртуальных лучей с главными плоскостями оптических поверхностей и коэффициентов “деформации” σ сферических поверхностей определяются выражениями

$$\begin{aligned} S_I &= \sum_{i=1}^{i=n} h_i Q_i, \\ S_{II} &= \sum_{i=1}^{i=n} H_i Q_i - J \sum_{i=1}^{i=n} W_i, \\ S_{III} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i^2}{h_i} Q_i - 2J \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{h_i} W_i + \\ &+ J^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_{i+1} \alpha_{i+1} - v_i \alpha_i}{h_i}, \\ S_{IV} &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_i \alpha_{i+1} - v_{i+1} \alpha_i}{h_i}, \end{aligned}$$

$$S_V = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i^3}{h_i^2} Q_i - 3J \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i^2}{h_i^2} W_i +$$

$$+ J^2 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{H_i}{h_i^2} [3(v_{i+1}\alpha_{i+1} - v_i\alpha_i) + (v_i\alpha_{i+1} - v_{i+1}\alpha_i)] -$$

$$- J^3 \sum_{i=1}^{i=n} \frac{v_{i+1}^2 - v_i^2}{h_i^2},$$

где $Q_i = T_i\sigma_i + P_i$, $W_i = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} (v_{i+1}\alpha_{i+1} - v_i\alpha_i)$, $P_i =$

$$= \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{v_{i+1} - v_i} W_i, T_i = \frac{(n_{i+1}\alpha_{i+1} - n_i\alpha_i)^3}{(n_{i+1} - n_i)^2}, v_i = 1/n_i. \text{ Инва-}$$

риант Лагранжа-Гельмгольца $J = n'\alpha'l'$.

При известных внешних и внутренних (конструктивных) параметрах оптической системы приведенные соотношения позволяют определить величину aberrаций третьего порядка, вносимых оптической системой в образованное ею изображение. Однако применение теории aberrаций третьего порядка имеет практический смысл при решении обратной, наиболее сложной, задачи определения конструктивных параметров оптической системы при заданных (или требуемых) значениях aberrаций.

Радиус кривизны r_0 в вершине поверхности второго порядка принимает значение в весьма широких пределах: $0 < |r_0| < \infty$. При больших значениях абсолютной величины радиуса r_0 пользоваться уравнением (1) неудобно. Решив уравнение (1) относительно z , получаем

$$z = \frac{1}{r_0} \frac{x^2 + y^2}{1 + \sqrt{1 - (1 - \sigma)(x^2 + y^2)/r_0^2}}. \quad (4)$$

Образующую кривую любой несферической поверхности вращения можно рассматривать как эвольвенту некоторой эволюты, при этом любая эволюта определяет семейство эвольвент, включая и исходную. При этом естественно предположить, что поверхности, определяемые уравнениями (1) и (4), не исчерпывают возможностей и свойств других несферических поверхностей. Русинов впервые обнаружил весьма важные aberrационные свойства, присущие эвольвентным поверхностям [2].

Обратимся к рис. 1, на котором показаны эвольвента окружности с радиусом R . При вращении верхней и нижней ветвей эвольвенты вокруг некоторой линии, принятой в качестве оси вращения (оптической оси), образуются две поверхности вращения, соприкасающиеся вершинами в осевой точке и имеющие одинаковый радиус кривизны в этой точке, равный r_0 . Поскольку обе поверхности образуются вращением, по сути дела, одной и той же кривой, их можно назвать бинарной (от лат. *binaris* — двойной) поверхностью.

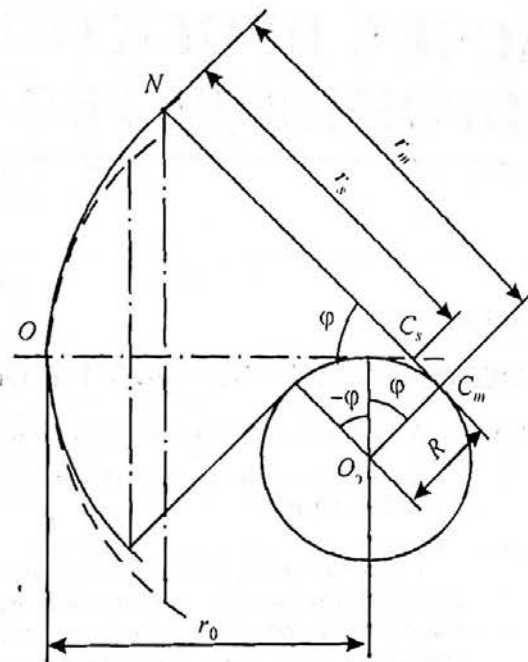


Рис. 1. Эвольвентная поверхность.

Пусть нормаль к верхней кривой эвольвенты в некоторой точке N образует с оптической осью угол φ . При этом в соответствии с рисунком меридиональный r_t и сагиттальный r_s радиусы кривизны поверхности вращения в точке N можно определить как

$$r_t = r_0 + R\varphi, r_s = r_t - R\text{tg}(\varphi/2).$$

Пусть осевая точка предмета расположена на бесконечно большом расстоянии от преломляющей поверхности, образованной вращением эвольвенты и разделяющей среды с показателями преломления n_1 и n_2 . При этом луч, выходящий из осевой точки предмета, падает на преломляющую поверхность в точку N параллельно оптической оси на расстоянии m от нее. Пусть нормаль к поверхности в точке N (в точке падения луча) образует угол φ с оптической осью, как показано на рис. 2, и пересекает ее в точке C_s .

Преломленный в точке N луч пересекает оптическую ось в точке F' под углом σ' к ней. Буквой O обозначена вершина преломляющей поверхности. При этом в соответствии с рис. 2

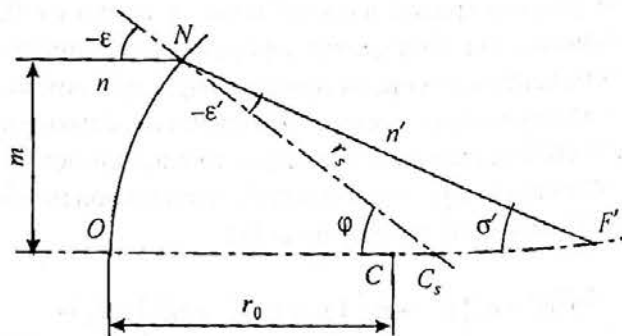


Рис. 2. Аберрации осевого пучка.

$$OC_s = r_0 + R \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = r_0 + R \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi},$$

$$C_s F' = -r_s \frac{\sin \varepsilon'}{\sin \sigma'} = -r_s \frac{\sin \varepsilon'}{\sin(\varphi + \varepsilon')}, \quad (5)$$

где угол ε падения луча и угол преломления ε' взаимосвязаны законом преломления: $n_1 \sin \varepsilon = n_2 \sin \varepsilon'$. В рассматриваемом случае угол $-\varepsilon = \varphi$. При $n_1 = 1$ и $n_2 = n$ имеем

$$C_s F' = r_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (6)$$

В соответствии с рисунком отрезок $OF' = OC_s + C_s F'$. Используя соотношения (5) и (6), получаем

$$OF' = r_0 + R \frac{\sin \varphi}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} + r_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (7)$$

Выражение, определяющее радиус кривизны в некоторой точке поверхности в сагиттальной плоскости, удобно представить в виде

$$r_s = r_0 + R \left[\arcsin(\sin \varphi) - \frac{\sin \varphi}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} \right]. \quad (8)$$

Из выражений (7) и (8) следует, что при $\varphi = 0$ радиус $r_s = r_0$, а отрезок $OF'_0 = nr_0/(n-1)$. Продольная сферическая aberrация в изображении точки $\Delta s' = OF' - OF'_0$.

Применив полученные соотношения, находим, что

$$\Delta s' = \frac{r_0}{n-1} + R \frac{\sin \varphi}{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} + r_s \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n^2 - 1}. \quad (9)$$

Естественно предположить, что $|R/r_0| < 1$ и $|\sin \varphi| < 1$. Тогда, используя выражения (9) и (8), продольную сферическую aberrацию можно определить степенным рядом Маклорена в виде

$$\Delta s' = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2n} \frac{r_0}{n-1} \sin^2 \varphi + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{3n} \frac{n-6}{n-1} \right) R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{n^3+1}{n^3} \frac{r_0}{n^2-1} \sin^4 \varphi + \frac{1}{16} \left(1 + \frac{1}{15n} \frac{3n-5}{n-1} - \frac{1}{n^2-1} \frac{n^3+1}{n^3} \right) R \sin^5 \varphi - \dots \quad (10)$$

В соответствии с рис. 2 $\varphi = \varepsilon = \varepsilon' + \sigma'$. При этом $n \sin \varphi = \sin \varphi \cos \sigma' + \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} \sin \sigma'$. Отсюда находим, что

$$\frac{n^2 - \sin^2 \varphi}{\sin^2 \varphi} = \frac{(n - \cos \sigma')^2}{\sin^2 \sigma'}.$$

Эти выражения легко преобразовать к виду

$$\sin \varphi = \frac{n \sin \sigma'}{\sqrt{1 + n^2 - 2n \cos \sigma'}}.$$

Будем приближенно считать, что

$$\sin \varphi \approx n \sigma' / (n-1). \quad (11)$$

Заметим, что вносимая в изображение точки эвольвентной поверхностью вращения продольная сферическая aberrация не должна зависеть от знака угла σ' . Поэтому, используя соотношение (11), поперечную сферическую aberrацию, вносимую в изображение осевой точки поверхностью вращения, в соответствии с выражением (10) определим степенным рядом вида

$$\delta g' = \frac{1}{2} \frac{n^2}{(n-1)^2} R \sigma' \sqrt{\sigma'^2} - \frac{1}{2n} \frac{n}{(n-1)^3} r_0 \sigma'^3 + \frac{1}{8} \left(1 + \frac{1}{3n} \frac{n-6}{n-1} \right) \frac{n^3}{(n-1)^3} R \sigma'^3 \sqrt{\sigma'^2} - \frac{1}{8} \frac{n}{n^2-1} \frac{n^3+1}{(n-1)^4} r_0 \sigma'^5 + \dots \quad (12)$$

Поперечная сферическая aberrация в изображении точки, образованном традиционной несферической поверхностью вращения, определяется степенным рядом, содержащим нечетные степени функции $\sin \sigma'$. Степенной ряд (12), определяющий сферическую aberrацию в изображении точки, образованном бинарной поверхностью вращения, включает члены, содержащие не только нечетные, но и четные степени функции $\sin \sigma'$.

Пусть сферическая aberrация определяется первыми двумя членами ряда (12)

$$\delta g' = \frac{1}{2} \frac{n^2}{(n-1)^2} R \sigma' \sqrt{\sigma'^2} - \frac{1}{2n} \frac{n}{(n-1)^3} r_0 \sigma'^3. \quad (13)$$

Положив при некотором (выбранном) значении $\sigma' = \sigma'_k$ сферическую aberrацию $\delta g'(\sigma'_k) = 0$, получаем

$$R = \frac{r_0}{n-1} \frac{\sqrt{\sigma_k'^2}}{n}.$$

При $\sigma'_k = k \sigma'_{кр}$ выражение (13) можно представить в виде

$$\delta g' = \frac{1}{2} \frac{n r_0}{(n-1)^3} \left(k \sqrt{\sigma_{кр}^2 \sigma'^2} - \sigma'^2 \right) \sigma'.$$

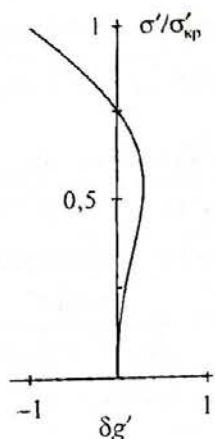


Рис. 3. Сферическая абберация эвольвентной поверхности.

Пусть, например, $k = 3/4$. При этом

$$\delta g' = \frac{1}{8} \frac{n r_0}{(n-1)^3} \left(3 \sqrt{\sigma_{кр}'^2 \sigma'^2} - 4 \sigma'^2 \right) \sigma'. \quad (14)$$

Возможный вид кривой сферической абберации, определяемой выражением (14), показан на рис. 3.

Заметим, что сферическая абберация в изображении точки, образованной поверхностью, полученной вращением нижней ветви эвольвенты, т. е. при отрицательных значениях угла φ , определяется выражением (12), если при этом знаки перед членами, содержащими угол σ' в четной степени, изменить на обратные.

Заметим, что при $R = 0$ члены в выражении (12), содержащие угол σ' в четной степени, обращаются в нуль.

Фокусное расстояние $f' = m/\sin \sigma'$, на рис. 2 равное отрезку NF' , находим в соответствии с теоремой синусов из треугольника $NC_s F'$:

$$NF' = \frac{\sin \varphi}{-\sin \varepsilon'} C_s F' = n C_s F'.$$

Используя формулу (6), получаем

$$f' = n r_s \left(\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \right) / (n^2 - 1). \quad (15)$$

При $\varphi = 0$ $f'_0 = n r_0 / (n - 1)$. При этом отступление от условия синусов δ определяется соотношением

$$\delta = \frac{f' - f'_0}{f'_0} = \frac{r_s}{r_0} \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi} + \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}}{n + 1}. \quad (16)$$

Выражение (16) можно представить степенным рядом Маклорена в виде

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{R}{r_0} \sin \varphi - \frac{1}{2n} \sin^2 \varphi + \frac{n-6}{24n} \frac{R}{r_0} \sin^3 \varphi - \frac{1}{n+1} \frac{n^3+1}{8n^3} \sin^4 \varphi + \dots \quad (17)$$

Применив приближенное соотношение (11), получаем

$$\delta = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} \frac{R}{r_0} \sigma' - \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \sigma'^2 + \frac{n^2}{24} \frac{n-6}{(n-1)^3} \frac{R}{r_0} \sigma'^3 - \frac{1}{8} \frac{n}{n+1} \frac{n^3+1}{(n-1)^4} \sigma'^4 + \dots \quad (18)$$

При малой линейной величине y' изображения меридиональная кома определяется формулой [3]

$$\delta g'_k = y' \frac{d}{d(\sin \sigma')} \left\{ \delta \sin \sigma' + \frac{\delta g'_k}{s'_p - s'_0} \right\}. \quad (19)$$

Здесь $\delta g'_k$ — поперечная сферическая абберация, s'_0 — расстояние от вершины поверхности до параксиального изображения осевой точки предмета, s'_p — расстояние от вершины поверхности до осевой точки выходного зрачка.

Заметим, что меридиональная кома, вносимая в изображение внеосевой точки эвольвентной поверхностью, не должна зависеть от знака угла σ' .

В рассматриваемом случае удобно принять $s'_p = \infty$. Полагая при этом $\sin \sigma' \approx \sigma'$, получаем

$$\delta g'_k = y' \left[\frac{n}{n-1} \frac{R}{r_0} \sqrt{\sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \sigma'^2 + \frac{n^2}{6} \frac{n-6}{(n-1)^3} \frac{R}{r_0} \sigma'^2 \sqrt{\sigma'^2} - \frac{5}{8} \frac{n}{n+1} \frac{n^3+1}{(n-1)^4} \sigma'^4 + \dots \right]. \quad (20)$$

Меридиональная кома в изображении точки, образованной традиционной несферической поверхностью вращения, определяется степенным рядом, содержащим четные степени функции $\sin \sigma'$. Степенной ряд (20), определяющий меридиональную кому в изображении точки, образованной бинарной поверхностью вращения, включает члены, содержащие не только четные, но и нечетные степени функции $\sin \sigma'$.

Пусть меридиональная кома в изображении точки определяется первыми двумя членами ряда (20)

$$\delta g'_k = y' \left[\frac{n}{n-1} \frac{R}{r_0} \sqrt{\sigma'^2} - \frac{3}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \sigma'^2 \right]. \quad (21)$$

Положив при некотором значении $\sigma' = \sigma'_k$ меридиональную кому $\delta g'_k(\sigma'_k) = 0$, получаем

$$R = \frac{3}{2} \frac{r_0}{n-1} \sqrt{\sigma'_k}.$$

При $\sigma'_k = k \sigma'_{кр}$ выражение (21) можно представить в виде

$$\delta g'_k = \frac{3}{2} \frac{n}{(n-1)^2} \left(k \sqrt{\sigma_{кр}'^2} - \sqrt{\sigma'^2} \right) y' \sqrt{\sigma'^2}.$$

Положение оптически сопряженных точек для бесконечно узких пучков лучей в меридиональной плоскости определяется формулой

$$\frac{n' \cos^2 \epsilon'}{s'_m} - \frac{n \cos^2 \epsilon}{s_m} = \frac{n' \cos \epsilon' - n \cos \epsilon}{r_m}, \quad (22)$$

а в сагиттальной плоскости –

$$\frac{n'}{s'_s} - \frac{n}{s_s} = \frac{n' \cos \epsilon' - n \cos \epsilon}{r_s}. \quad (23)$$

Здесь r_m и r_s – радиусы кривизны несферической поверхности в точке падения луча в меридиональной и сагиттальной плоскостях соответственно. Для предмета, расположенного на бесконечно большом расстоянии, из формул (22) и (23) находим

$$s'_m = \frac{n' \cos \epsilon' + n \cos \epsilon}{n'^2 - n^2} n' \cos^2 \epsilon' r_m, \quad (24)$$

$$s'_s = \frac{n' \cos \epsilon' + n \cos \epsilon}{n'^2 - n^2} n' r_s. \quad (25)$$

Отсутствие астигматизма в изображении точки определяется равенством $s'_m = s'_s$, что равносильно условию

$$r_s = r_m \cos^2 \epsilon'. \quad (26)$$

Это условие, справедливое для несферической поверхности любой формы, применительно к поверхности вращения второго порядка определяет необходимость совмещения выходного зрачка с одним из геометрических фокусов кривой [4]. Таким образом, для любой поверхности второго порядка существуют два положения анастигматических выходных зрачков. Однако в случае поверхностей, образующих анаберрационное изображение осевой точки, устранение астигматизма в изображении внеосевых точек возможно лишь при одном положении входного зрачка.

Представим условие (26) в виде $r_m - r_s = r_m \sin^2 \epsilon'$; для поверхности с эвольвентным профилем $r_m - r_s = R \operatorname{tg} 0,5 \varphi$. При этом получаем

$$\sin \epsilon' = \sqrt{\frac{R}{r_m} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{R}{r_0 + R \varphi} \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi}}.$$

Применив закон преломления $n' \sin \epsilon' = n \sin \epsilon$, можно определить угол ϵ , а вслед за этим можно найти углы при пересечении главного луча с осью w и w' :

$$w = \varphi \pm \epsilon, \quad w' = \varphi \pm \epsilon', \quad (27)$$

которые и определяют два положения анастигматических зрачков эвольвентной поверхности.

На рис. 4 показан эвольвентный профиль преломляющей поверхности, разделяющий среды с показателями преломления $n_1 = 1$, $n_2 = n$. Осевая точка входного зрачка расположена в точке P , опре-

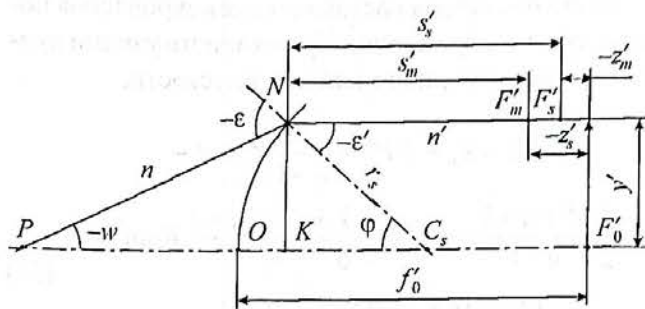


Рис. 4. Астигматизм эвольвентной поверхности.

деляющей телецентрический ход главного луча в пространстве изображений.

Нормаль к поверхности в точке N падения луча на поверхность образует с оптической осью угол φ , равный углу преломления луча в этой точке, т. е. $\varphi = -\epsilon'$. Главный луч пересекает гауссову плоскость изображения в точке F'_w на расстоянии y' от оптической оси. В рассматриваемом случае формулы (24) и (25) можно переписать в виде

$$s'_m = \frac{n \cos \epsilon' + \cos \epsilon}{n^2 - 1} n \cos^2 \epsilon' (r_0 + R \varphi), \quad (28)$$

$$s'_s = \frac{n \cos \epsilon' + \cos \epsilon}{n^2 - 1} n \left(r_0 + R \varphi - R \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right). \quad (29)$$

Применяя закон преломления в виде $n \sin \epsilon' = \sin \epsilon$ и учитывая тот факт, что $\sin \varphi = -\sin \epsilon'$, выражения (28) и (29) можно представить степенным рядом Маклорена

$$s'_m = \frac{n}{n-1} r_0 + \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{n-1} \right) n r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{6} \frac{3n+5}{n-1} n R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \left(n - \frac{3}{n-1} \right) n^2 r_0 \sin^4 \varphi + \dots, \quad (30)$$

$$s'_s = \frac{n}{n-1} r_0 + \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{n^2}{n-1} r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{24} \frac{6n-1}{n-1} n R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{n^3+1}{n^2-1} n^2 r_0 \sin^4 \varphi + \dots \quad (31)$$

В соответствии с рис. 4 отрезок $NF'_w = OF'_0 - OK = f'_0 - OC_s + KC_s$, где $f'_0 = nr_0/(n-1)$, $KC_s = r_s \cos \varphi$. Используя формулу (5), в результате преобразований получаем

$$NF'_w = r_0/(n-1) - R \sin \varphi + (r_0 + R \varphi) \cos \varphi.$$

Полученное выражение можно представить степенным рядом вида

$$NF'_w = \frac{n}{n-1} r_0 - \frac{1}{2} r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} r_0 \sin^4 \varphi - \dots \quad (32)$$

При этом осевая составляющая искривления поверхности изображения, образованного узкими пучками лучей в меридиональной плоскости,

$$z'_m = s'_m - NF'_w = \frac{n}{n-1} R \sin \varphi - \frac{1}{2} \frac{n^2 + n + 1}{n-1} r_0 \sin^2 \varphi - \frac{1}{6} \frac{3n^2 + 3n + 2}{n-1} R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{(n-1)(n^3 - 1) - 3n^2}{n-1} r_0 \sin^4 \varphi + \dots \quad (33)$$

Сагиттальная составляющая искривления поверхности изображения

$$z'_s = s'_s - NF'_w = \frac{1}{2} \frac{n}{n-1} R \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{n^2}{n-1} \right) r_0 \sin^2 \varphi + \frac{1}{24} \left(8 - n - \frac{5n^2}{n-1} \right) R \sin^3 \varphi - \frac{1}{8} \frac{n^5 + 1}{n^2 - 1} r_0 \sin^4 \varphi + \dots \quad (34)$$

Из рисунка следует, что $-\varepsilon' = \varphi = w - \varepsilon$. Применяв закон преломления, находим, что $\sin \varphi = \sin w \sqrt{1 - n^2 \sin^2 \varphi} + n \cos w \sin \varphi$. Это выражение легко преобразовать к виду

$$\sin \varphi = \frac{\sin w}{\sqrt{1 - 2n \cos w + n^2}}.$$

Приближенно будем считать, что

$$\sin \varphi \approx w / (1 - n). \quad (35)$$

Меридиональная и сагиттальная составляющие искривления поверхности изображения не зависят от знака угла w . Поэтому соотношение (35) запишем в виде $\sin \varphi \approx \sqrt{w^2} / (1 - n)$.

Подставив это соотношение в формулы (33) и (34), получаем

$$z'_m = \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} - \frac{1}{2} \frac{n^3 - 1}{(n-1)^4} r_0 w^2 - \frac{1}{6} \frac{3n^3 - 4}{(n-1)^5} R w^2 \sqrt{w^2} - \frac{1}{8} \frac{(n-1)(n^3 - 1) - 3n^2}{(n-1)^5} r_0 w^4 + \dots, \quad (36)$$

$$z'_s = \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} - \frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)^3} r_0 w^2 - \frac{1}{24} \frac{6n^2 - 9n + 8}{(n-1)^4} R w^2 \sqrt{w^2} - \frac{1}{8} \frac{n^5 + 1}{(n+1)(n-1)^5} r_0 w^4 + \dots \quad (37)$$

Будем считать, что меридиональная и сагиттальная составляющие кривизны поверхностей изображения определяются первыми двумя членами соответствующих выражений (36) и (37). При этом

$$z'_{m_2} = \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} - \frac{1}{2} \frac{n^3 - 1}{(n-1)^4} r_0 w^2, \quad (38)$$

$$z'_{s_2} = \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} - \frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)^3} r_0 w^2. \quad (39)$$

При $R = 0$

$$z'_{m_2} = z'_m = -\frac{1}{2} \frac{n^3 - 1}{(n-1)^4} r_0 w^2,$$

$$z'_{s_2} = z'_s = -\frac{1}{2} \frac{n^2 - n + 1}{(n-1)^3} r_0 w^2.$$

Перепишем выражения (38) и (39) в виде

$$z'_{m_2} = \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} + z'_m, \quad (40)$$

$$z'_{s_2} = \frac{1}{2} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2} + z'_s. \quad (41)$$

В области аббераций третьего порядка осевая составляющая пещвалевой кривизны z'_p поверхности изображения определяется соотношением [5]

$$z'_p = (3z'_s - z'_m) / 2. \quad (42)$$

Выразив из соотношений (40) и (41) величины z'_m и z'_s и подставив их в выражение (42), получаем

$$z'_p = \frac{3z'_{s_2} - z'_{m_2}}{2} = \frac{1}{4} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2}.$$

При $z'_{m_2} = z'_m = z'_{p_2}$ имеем

$$z'_{p_2} = z'_p + \frac{1}{4} \frac{n}{(n-1)^2} R \sqrt{w^2}. \quad (43)$$

Отсюда следует, что замена сферической поверхности эвольвентной приводит к некоторой компенсации кривизны поверхности изображения без изменения ее пещвалевой составляющей.

Из рис. 4 следует, что $y' = r_s \sin \varphi$. Это выражение можно представить степенным рядом вида

$$y' = r_0 \sin \varphi + \frac{1}{2} R \sin^2 \varphi + \frac{1}{24} R \sin^4 \varphi + \dots \quad (44)$$

Вполне очевидно, что величина изображения не изменится, если эвольвентную поверхность дополнить плоской, образовав таким образом плосковыпуклую линзу. При этом номинальная величина изображения определяется соотношением

$$y'_0 = -f'_0 \operatorname{tg} w \approx -f'_0 \left(w + \frac{1}{3} w^3 + \dots \right),$$

где $f_0' = r_0 / (n-1)$.

Применив приближенное соотношение (35), выражение (44) можно представить в виде

$$y' = -\frac{r_0}{n-1}w + \frac{1}{2} \frac{R}{(n-1)^2}w^2 + \frac{1}{24} \frac{R}{(n-1)^4}w^4 + \dots$$

Тогда дисторсия $\Delta y'$ изображения, образованного плосковыпуклой линзой с эвольвентным профилем выпуклой поверхности, равная разности $y' - y_0'$, определится выражением вида

$$\Delta y' = \frac{1}{2} \frac{R}{(n-1)^2}w\sqrt{w^2} + \frac{1}{3} \frac{r_0}{n-1}w^3 + \frac{1}{24} \frac{R}{(n-1)^4}w^3\sqrt{w^2} + \dots \quad (45)$$

Русинов показал в [2], что в изображении, образованном плосковыпуклой линзой с эвольвентным профилем выпуклой поверхности, при плоской поверхности, обращенной к предмету, и при телецентрическом ходе главного луча в пространстве изображений можно получить нулевое значение дисторсии для некоторой (выбранной) величины полевого угла w . Однако и в рассматриваемом случае возможно решение этой задачи. Действительно, если предположить, что выпуклая поверхность образована вращением нижней ветви эвольвенты окружности, то в выражении (45) перед членами, содержащими четные степени угла w , следует изменить знак на обратный (отрицательный). Соответственно при $\Delta y' = 0$ получаем

$$R = \frac{2}{3} \frac{(n-1)\sqrt{w^2}}{1 + w^2/12(n-1)^2} r_0 \approx 2 \frac{n-1}{3} r_0 \sqrt{w^2}.$$

Из анализа полученных соотношений следует, что эффективность влияния эвольвентного профиля поверхности вращения на aberrации изображения определяется прежде всего величиной радиуса R . При $R = 0$ эти соотношения определяют aberrации изображения, образованного сферической преломляющей поверхностью.

Как показано в [6], поперечными aberrациями второго порядка обладает изображение, образованное оптическими поверхностями, которые получены путем вращения любой плоской кривой вокруг нормали в некоторой ее точке, когда нормаль не является осью симметрии этой кривой. Таким образом, поверхность вращения с эвольвентным профилем можно считать частным случаем несферических поверхностей этого вида.

Образующую кривую такой поверхности можно определить уравнением вида

$$z = a_1 \rho^2 + a_2 \rho^3 + \dots + a_n \rho^{n+1}. \quad (46)$$

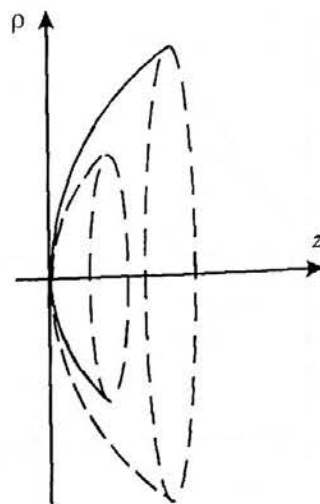


Рис. 5. Бинарная поверхность.

При $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ вращение этой кривой образует одну поверхность, а при $\rho = -\sqrt{x^2 + y^2}$ — другую, как показано на рис. 5. Следовательно, и в этом случае вращение кривой (46) образует бинарную поверхность. При анализе aberrаций второго порядка достаточно ограничиться рассмотрением поверхности, представленной уравнением $z = a_1 \rho^2 + a_2 \rho^3$. Будем считать, что в рассматриваемом случае $z = a_1 \rho^2 + a_2 \rho^2 \sqrt{\rho^2}$.

При этом можно показать [7, 8], что меридиональная и сагиттальная составляющие поперечной aberrации второго порядка определяются следующими соотношениями:

$$\delta g' = Q \left[s^4 m^2 (m^2 + M^2) + s_p^2 s^2 l^2 (6m^2 + M^2) - 2s_p s^3 l m (2m^2 + M^2) - 4s_p^3 s l^3 m + s_p^4 l^4 \right]^{1/2} \text{sign} y, \quad (47)$$

$$\delta G' = Q \left[s^4 M^2 (m^2 + M^2) - 2s_p s^3 l m M^2 + s_p^2 s^2 l^2 M^2 + s_p^4 l^4 \right]^{1/2} \text{sign} x, \quad (48)$$

где m и M — координаты падающего луча на входном зрачке в меридиональной и в сагиттальной плоскостях; s и s_p — расстояния от вершины несферической поверхности до плоскостей предмета и входного

зрачка; $Q = -\frac{3a_2(n'-n)s'}{n'(s_p-s)^2}$ — коэффициент, завися-

щий от характера деформации поверхности, положения предмета, входного зрачка и плоскости изображения Гаусса (расстояния s') относительно вершины поверхности.

Весьма обстоятельный анализ свойств геометрических aberrаций второго порядка, вносимых в образованное изображение рассматриваемой поверхностью, выполнен в работе [9].

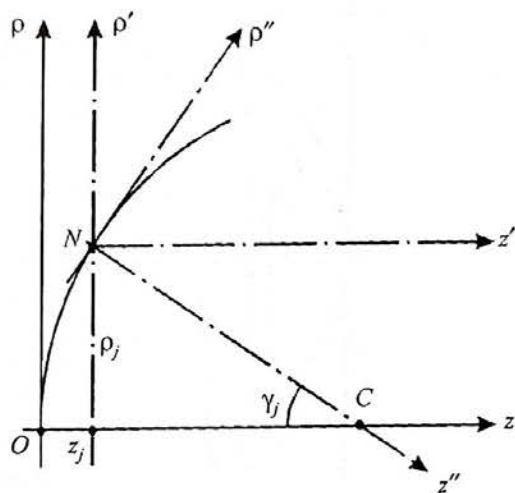


Рис. 6. Образующая кривая второго порядка бинарной поверхности.

Наиболее широко в практике композиции оптических систем применяются несферические поверхности вращения второго порядка, образующую плоскую кривую которых можно определить уравнением вида

$$\rho^2 = 2r_0 z - (1 + \sigma)z^2. \quad (49)$$

Следуя методу, предложенному Грамматиным [6], образуем несферическую поверхность путем вращения кривой, определяемой уравнением (49), вокруг нормали к ней в некоторой внеосевой точке $N(\rho_j, z_j)$. При параллельном переносе системы координат ρOz в положение $\rho' Nz'$ в соответствии с рис. 6 имеем $\rho = \rho' + \rho_j$, $z = z' + z_j$.

В системе координат $\rho' Nz'$ уравнение (49) принимает вид

$$\rho'^2 + 2\rho_j \rho' = 2[r_0 - (1 + \sigma)z_j]z' - (1 + \sigma)z'^2. \quad (50)$$

Нормаль к кривой в произвольной точке образует с ее осью угол γ , в соответствии с уравнением (49) $\operatorname{tg} \gamma = dz/d\rho = \rho/[r_0 - (1 + \sigma)z]$. При этом для точки N имеем

$$\operatorname{tg} \gamma_j = \rho_j/[r_0 - (1 + \sigma)z_j], \quad \sin \gamma_j = \operatorname{tg} \gamma_j / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_j},$$

$$\cos \gamma_j = \sin \gamma_j / \operatorname{tg} \gamma_j = 1 / \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma_j}.$$

Повернем систему координат $\rho' Nz'$ на угол γ_j в положение $\rho'' Nz''$ до совмещения оси Nz'' с нормалью к кривой в точке N . Координаты ρ' и z' произвольной точки в системе координат $\rho'' Nz''$ можно определить как

$$\begin{pmatrix} \rho' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \gamma_j & -\sin \gamma_j \\ \sin \gamma_j & \cos \gamma_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

При этом уравнение (49) в системе координат $\rho'' Nz''$ принимает вид

$$a\rho''^2 + b\rho'' + c\rho''z'' + dz'' + ez''^2 = 0, \quad (51)$$

где $a = 1 + \sigma \sin^2 \gamma_j$, $b = 2[(1 + \sigma)z_j \sin \gamma_j + \rho_j \cos \gamma_j - r_0 \sin \gamma_j]$, $c = 2\sigma \sin \gamma_j \cos \gamma_j$, $d = 2[(1 + \sigma)z_j \cos \gamma_j - \rho_j \sin \gamma_j - r_0 \cos \gamma_j]$, $e = 1 + \sigma \cos^2 \gamma_j$.

При $\rho'' = \sqrt{x^2 + y^2}$ уравнение (51) в форме

$$a(x^2 + y^2) \pm b\sqrt{x^2 + y^2} \pm \pm cz\sqrt{x^2 + y^2} + dz + ez^2 = 0 \quad (52)$$

определяет бинарную поверхность вращения. Заметим, что уравнение (51) представляет собой неявно заданную функцию. Может оказаться удобным представить уравнение (52) в виде

$$z = -\frac{x^2 + y^2 \pm a_1 \sqrt{x^2 + y^2} + a_2 z^2}{b_0 \pm b_1 \sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (53)$$

Уравнение поверхности в форме (53) позволяет определить, например, координаты точки падения луча на поверхность методом итераций. Вполне очевидно, что при $\gamma_j = 0$ коэффициенты $a = 1$, $b = \rho_j = 0$, $c = 0$, $d = 2(1 + \sigma)z_j - 2r_0 = -2r_0$, $e = 1$. При этом уравнение (51) принимает вид уравнения (49) (штрихи при соответствующих величинах за ненадобностью опускаем). С другой стороны, при $\gamma_j = \pi/2$ разность $r_0 - (1 + \sigma)z_j = 0$. При этом

$$z_j = r_0 / (1 + \sigma), \quad \rho_j = \sqrt{2r_0 z_j - (1 + \sigma)z_j^2} =$$

$$= r_0 \sqrt{1 + \sigma} / (1 + \sigma), \quad a = 1 + \sigma, \quad b = 2[(1 + \sigma)z_j - r_0] = 0,$$

$$c = 0, \quad d = -2\rho_j = -2r_0 \sqrt{1 + \sigma} / (1 + \sigma), \quad e = 1.$$

Подставив эти значения коэффициентов в выражение (51), получаем

$$\rho^2 = 2r_{0\perp} z - (1 + \sigma_{\perp})z^2, \quad (54)$$

где $r_{0\perp} = \sqrt{1 + \sigma} / (1 + \sigma)^2$, $1 + \sigma_{\perp} = 1 / (1 + \sigma)$.

Полученное уравнение определяет вещественные значения величины при $\sigma > -1$. При $\rho^2 = x^2 + y^2$ уравнение (54) определяет эллипсоид вращения; если при $\gamma_j = 0$ эллипсоид был вытянутым, то при $\gamma_j = \pi/2$ получаем сплюснутый эллипсоид, и наоборот. В общем случае вращение эллипса вокруг нормали к кривой в произвольной точке образует бинарную поверхность, как показано на рис. 7.

Применение несферических поверхностей вращения второго порядка при композиции оптических систем позволяет успешно решать задачу исправления aberrаций третьего порядка образованного ими изображения. Однако при сравнительно больших светосиле и угловом поле оптических систем остаточные aberrации высшего порядка принимают нередко недопустимо большие значения, для исправления которых несферические поверхно-

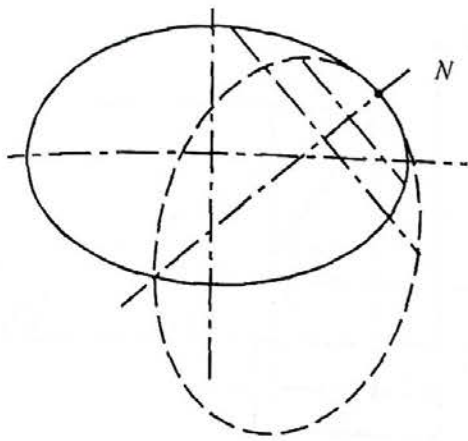


Рис. 7. Сечение бинарной поверхности, образованной вращением эллипса.

сти второго порядка заменяют поверхностями более высокого порядка.

Такие поверхности традиционно принято представлять уравнениями вида

$$\rho^2 = a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n, \quad (55)$$

$$z = a_1 \rho^2 + a_2 \rho^4 + \dots + a_{n-1} \rho^{2(n-1)} + a_n \rho^{2n} \quad (56)$$

или

$$z = \frac{c \rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + c) \rho^2}} + a_1 \rho^2 + \dots + a_n \rho^{2n}, \quad (57)$$

где $c = \frac{1}{r_0}$, $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Когда изменение aberrаций в пределах светового пучка лучей имеет весьма нелинейный характер, применение традиционной формы представления несферических поверхностей не всегда решает задачу требуемого исправления aberrаций. В этом случае приходится прибегать к поиску другого вида уравнения для аппроксимации формы несферической поверхности.

При контроле несферических отражающих поверхностей астрономических зеркал широко применяется автоколлимационная схема с линзовым компенсатором. Применение такой схемы всегда сопряжено с необходимостью так или иначе решать проблему аттестации компенсатора, поскольку погрешности его изготовления непосредственно влияют на форму

волнового фронта, отраженного от контролируемой поверхности, причем как в прямом, так и в обратном ходе лучей. Для проверки точности изготовления деталей и сборки двухлинзового компенсатора в схеме контроля формы отражающей поверхности зеркального параболоида диаметром 6,5 м при относительном отверстии $2A = 1:1,25$ было использовано эталонное зеркало с несферической поверхностью, имитирующей отражающую поверхность контролируемого параболоида [10], при этом каждый луч, выходящий из компенсатора, падает на поверхность эталонного зеркала по нормали к ней и отражается обратно к компенсатору, как показано на рис. 8.

Расположенное в непосредственной близости от компенсатора эталонное зеркало имеет сравнительно небольшой диаметр, что определило возможность обработки его отражающей поверхности по методу алмазного точения на станке с программным управлением. Профиль отражающей поверхности эталонного зеркала, по сути дела, представляет собой эвольвенту эволюты профиля контролируемого параболоида, расположенную вблизи каустики нормалей к поверхности параболоида. Важно заметить, что при постоянном размахе отклонений эвольвенты от окружности с уменьшением диаметра эталонного зеркала нелинейность профиля его отражающей поверхности растет. Поэтому попытка традиционной аппроксимации отражающей поверхности эталонного зеркала уравнением вида (57) даже при использовании десяти коэффициентов степенного ряда привела к огромной величине остаточной деформации волнового фронта [11]. Замена этого уравнения неявной функцией вида

$$F(R, z) = -z + aR^2 + bR^4 + cR^6 + dR^2 z + eR^4 z + fz^2 + gR^2 z^2 + hz^3 + jR^2 z^3 + kz^4 = 0, \quad (58)$$

где $R = (x^2 + y^2)^{1/2}$, при том же числе коэффициентов позволила уменьшить размах остаточной волновой aberrации на четыре порядка.

Неявная форма представляет собой наиболее общую форму уравнения несферической поверхности. Однако, кроме традиционной, существуют и другие формы уравнений, определяющих несферические поверхности в явном виде.

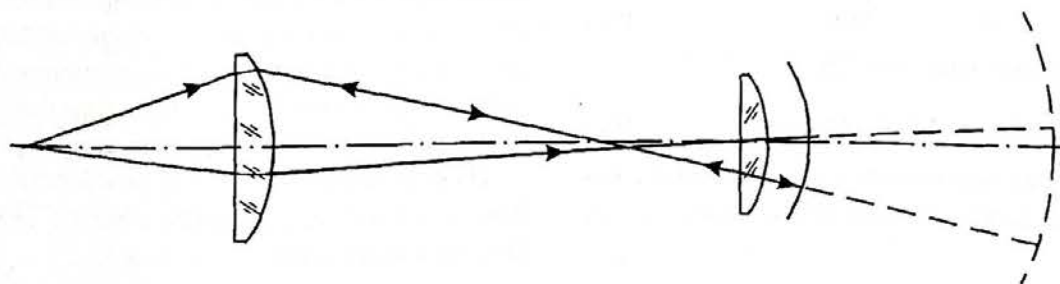


Рис. 8. Оптическая схема контроля компенсатора.

Так, например, в афокальной оптической системе для расширения лазерного пучка лучей, образованной сочетанием двух светосильных отражающих поверхностей, при сферической форме отражающей поверхности большого зеркала поверхность малого зеркала была аппроксимирована явной функцией вида [11]

$$F(\rho, z) = -z + b_1 \rho^{4/3} + b_2 \rho^{6/3} + b_3 \rho^{8/3} + b_4 \rho^{10/3} + \dots + b_n \rho^{2(n+1)/3}, \quad (59)$$

где $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

Оказалось, что при относительном отверстии поверхностей $2A = 1:1$ и аппроксимации отражающей поверхности малого зеркала функцией (59) рассматриваемая афокальная система обладает лучшей коррекцией aberrаций, чем при аппроксимации уравнением традиционной формы. Однако при подобной аппроксимации отражающей поверхности малого зеркала в двухзеркальной системе кассегреновского типа при относительном отверстии сферического зеркала $2A = 1:0,7$ остаточные aberrации оказались больше, чем при аппроксимации той же поверхности неявной функцией (58) при традиционном описании поверхности.

В работе [12] показано, что при сферической форме большого зеркала форма поверхности малого зеркала в афокальной оптической системе определяется эквидистантной отражающему параболоиду поверхностью, т. е. профиль отражающей поверхности малого зеркала представляет собой эвольвенту эволюты параболы. На рис. 9 показано сечение оптической системы из двух отражающих поверхностей произвольной формы меридиональной плоскостью. На рисунке с вершиной сечения малого зеркала совмещено начало системы координат YOZ , а с вершиной сечения большого зеркала — начало системы YOZ . В соответствии с рисунком и принципом таутохронизма имеем

$$ABMN = z + BM - d - Z = -2d, \quad (60)$$

где d — расстояние между отражающими поверхностями. Из рис. 9 следует, что отрезок BM

$$BM = (-d + z - Z) / \cos 2\varphi. \quad (61)$$

Подставив соотношение (61) в равенство (60) и преобразовав его, получаем

$$Z - z = -d \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (62)$$

Из того же рисунка находим, что

$$Y - y = (-d + z - Z) \operatorname{tg} 2\varphi. \quad (63)$$

Выполнив в этом выражении в соответствии с соотношением (62) замену величин и преобразовав его, получаем

$$Y - y = -2d \operatorname{tg} \varphi. \quad (64)$$

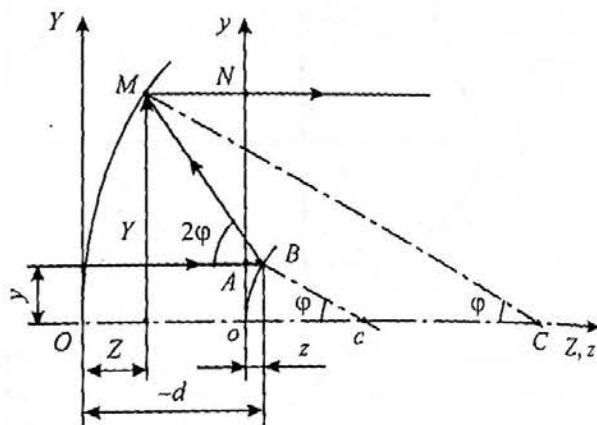


Рис. 9. Двухзеркальная афокальная система со стигматической коррекцией aberrаций.

Для большого зеркала имеем

$$Y = R \sin \varphi, \quad Z = R - R \cos \varphi,$$

где R — радиус кривизны сферической поверхности. При этом

$$y = R \sin \varphi + 2d \operatorname{tg} \varphi, \quad (65)$$

$$z = R - R \cos \varphi + d \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (66)$$

Пусть некоторая кривая задана уравнением $y_0 = f_0(z_0)$. Пусть φ — угол между нормалью к кривой и осью z_0 . Тогда для эквидистантной кривой $y_1 = f_1(z_1)$, каждая точка которой смещена по нормали к поверхности $y_0 = f_0(z_0)$ на расстояние L , имеем $y_0 - y_1 = L \sin \varphi$, $z_0 - z_1 = L - L \cos \varphi$.

Пусть кривая $y_0 = f_0(z_0)$ описывает параболу $y_0^2 = 2r_p z_0$, для которой справедливо соотношение $y_0 = r_p \operatorname{tg} \varphi$. При этом $z_0 = y_0^2 / 2r_p = (1/2)r_p \operatorname{tg}^2 \varphi$. В этом случае имеем

$$y_1 = y_0 - L \sin \varphi = r_p \operatorname{tg} \varphi - L \sin \varphi, \quad (67)$$

$$z_1 = z_0 - L + L \cos \varphi = (1/2)r_p \operatorname{tg}^2 \varphi - L + L \cos \varphi. \quad (68)$$

Положив $r_p = 2d$, а $L = -R$, получаем

$$y_1 = R \sin \varphi + 2d \operatorname{tg} \varphi, \quad (69)$$

$$z_1 = R - R \cos \varphi + d \operatorname{tg}^2 \varphi. \quad (70)$$

Сопоставив выражения (65), (66) и выражения (69), (70), приходим к выводу, что кривая, определяемая формулами (65) и (66), представляет собой кривую, эквидистантную параболе с радиусом кривизны при вершине $r_p = 2d$ и удаленную от последней на расстояние $L = -R$. При этом в выражениях (67) и (68) естественно принять $y_1 = y$, $z_1 = z$.

Из выражений (67) и (68) соответственно найдем, что $L \sin \varphi = r_p \operatorname{tg} \varphi - y$, $L \cos \varphi = z + L - (1/2)r_p \operatorname{tg}^2 \varphi$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{tg} \varphi = (r_p \operatorname{tg} \varphi - y) / [z + L - (1/2)r_p \operatorname{tg}^2 \varphi]$$

или

$$y = (r_p - L - z) \operatorname{tg} \varphi + (1/2) r_p \operatorname{tg}^3 \varphi. \quad (71)$$

Из выражения (67) получаем

$$(r_p \operatorname{tg} \varphi - y)^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) - L^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0 \quad (72)$$

или в развернутом виде

$$r_p^2 \operatorname{tg}^4 \varphi - 2 y r_p \operatorname{tg}^3 \varphi + (r_p^2 + y^2 - L^2) \operatorname{tg}^2 \varphi - 2 y r_p \operatorname{tg} \varphi + y^2 = 0. \quad (73)$$

Для краткости записи удобно обозначить $\operatorname{tg} \varphi = \psi$. Тогда, выразив линейные величины в масштабе радиуса r_p при вершине параболоида, выражения (71) и (73) можно представить в виде

$$\psi^3 + 2(1 - L - z)\psi - 2y = 0, \quad (74)$$

$$\psi^4 - 2y\psi^3 + (1 - L^2 + y^2)\psi^2 - 2y\psi + y^2 = 0. \quad (75)$$

Запишем уравнение (74) в виде

$$\psi^3 + 3p\psi + 2q = 0, \quad (76)$$

где $p = (2/3)(1 - L - z)$, $q = -y$.Из уравнения (76) следует, что $\psi^3 = 2y - 3p\psi$, $\psi^4 = 2y\psi - 3p\psi^2$.

Подставив эти соотношения в выражение (75), получаем

$$(m - 3p)\psi^2 + 6p\psi - 3y^2 = 0, \quad (77)$$

где $m = 1 - L^2 + y^2$. Заметим, что $m = 3p \neq 0$. При этом выражение (77) можно представить в виде

$$\left(\psi + \frac{3py}{m - 3p} \right)^2 = \frac{9p^2 y^2}{(m - 3p)^2} + \frac{3y^2}{m - 3p}.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} \psi &= -\frac{3py}{m - 3p} + \sqrt{\frac{9p^2 y^2}{(m - 3p)^2} + \frac{3y^2}{m - 3p}} = \\ &= -\frac{3py}{m - 3p} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{m - 3p}{3p^2}} \right). \end{aligned} \quad (78)$$

Заменив в этом выражении координату y координатой $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, в результате очевидных, но весьма громоздких преобразований получаем уравнение несферической поверхности, эквидистантной параболоиду вращения, в виде

$$\begin{aligned} a_{11}\rho^2 + a_{12}\rho^4 + a_{13}\rho^6 + a_{21}\rho^2 z + a_{31}\rho^2 z^2 + \\ + a_{41}\rho^2 z^3 + a_{22}\rho^4 z + a_{32}\rho^4 z^2 + b_{11}z + b_{12}z^2 + \\ + b_{13}z^3 + b_{14}z^4 = 0, \end{aligned} \quad (79)$$

где $a_{11} = 4L(L - r_p)^3$, $a_{12} = (L - r_p)^2 - 9L(L + 2r_p)$, $a_{13} = 4$, $a_{21} = 4(r_p - L)(4L^2 + 15Lr_p - r_p^2)$, $a_{31} = 8[(2r_p -$

$-L)^2 - 2L(L + r_p)]$, $a_{41} = -16r_p$, $a_{22} = 4(2L - 5r_p)$, $a_{32} = 4$, $b_{11} = 8L(L - r_p)^4$, $b_{12} = 4(L - r_p)^2[(L - r_p)^2 - 8Lr_p]$, $b_{13} = 16r_p[2Lr_p - (r_p - L)^2]$, $b_{14} = 16r_p^2$.

Полученное выражение представляет собой точное уравнение несферической поверхности, эквидистантной параболоиду вращения, в сочетании со сферическим зеркалом образующей декартову афокальную систему, т. е. систему, преобразующую осевую параллельный пучок световых лучей в пространстве предметов в строго параллельный пучок лучей в пространстве изображений. При этом важно отметить, что полученное уравнение имеет вид степенного ряда в форме неявной функции. Этот результат в сочетании с опытом непосредственного применения [11] подобного уравнения позволяет сделать вывод о том, что уравнение в форме неявной функции по сравнению с традиционной является более общей формой описания несферических поверхностей, определяющей возможность достижения лучшей коррекции aberrаций в изображении, образованном соответствующей оптической системой.

Естественно предположить, что уравнение несферической поверхности, эквидистантной любой поверхности вращения второго порядка, будет определяться неявной функцией. При этом можно предположить, что в оптической системе, содержащей более одной поверхности вращения, замена несферических поверхностей второго порядка им эквидистантными в том же положении и без изменения их оптических сил может привести к лучшей коррекции aberrаций образованного системой изображения. Дальнейшее изучение свойств несферических поверхностей вращения, предложенных М.М. Русиновым [2, 4], А.П. Грамматиным [6-9] и Д.Т. Пуряевым [12], явится важным этапом в развитии теории композиции оптических систем.

Работа выполнена при поддержке Министерства образования РФ в рамках гранта А03-3.20-52.

ЛИТЕРАТУРА

1. Слюсарев Г.Г. Методы расчета оптических систем. Л.: Машиностроение, 1969. 672 с.
2. Русинов М.М. Композиция оптических систем. Л.: Машиностроение, 1989. 383 с.
3. Слюсарев Г.Г. Геометрическая оптика. М.-Л.: АН СССР, 1946. 332 с.
4. Русинов М.М. Несферические поверхности в оптике. М.: Недра, 1973. 296 с.
5. Зверев В.А. Основы геометрической оптики. СПб.: СПбГИТМО, 2002. 218 с.
6. Граматин А.П. Асферические оптические поверхности // ОМП. 1990. № 2. С. 36, 58, 72.

7. Грамматин А.П., Марчук С.М. Аберрации второго порядка асферической поверхности вращения // ОМП. 1990. № 6. С. 40–41.
 8. Грамматин А.П., Марчук С.М. Асферические оптические поверхности нового типа и их аберрационные свойства // ОМП. 1990. № 11. С. 55–57.
 9. Грамматин А.П. Свойства геометрических аберраций второго порядка // Оптический журнал. 1994. № 8. С. 34–38.
 10. Sasian J.M., Lerner S.A., Burge J. Certification of a null corrector via a diamond turned asphere: design and implementation // Proc. SPIE. 1999. V. 3749. P. 284–285.
 11. Lerner S.A., Sasian J.M. Use of implicitly defined optical surfaces for the design of imaging and illumination systems // Opt. Engin. 2000. V. 39. № 7. P. 1796–1801.
 12. Puryayev D.T. Afocal two-mirror system // Opt. Engin. 1993. V. 32. № 6. P. 1325–1327.
-