

ИКОНИКА – НАУКА ОБ ИЗОБРАЖЕНИИ

УДК 517.968: 517.983.54: 621.397.3

РЕКОНСТРУКЦИЯ СМАЗАННЫХ И ЗАШУМЛЕННЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ

© 2009 г. В. С. Сизиков, доктор техн. наук; М. В. Римских; Р. К. Мирджамолов

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий,
механики и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: sizikov2000@mail.ru, romefamily@yandex.ru, rustam._.85@mail.ru

Предложен новый подход к проблеме учета интенсивностей, исходящих из точек вне заданных границ изображения. В ряде работ это учитывается путем введения так называемых граничных условий (анти-рефлексивных и др.). В данной работе вместо них предлагается прием усечения, не требующий знания интенсивностей за границами изображения. На основе приема усечения изложены прямая и обратная задачи обработки изображения. Для решения обратной задачи реконструкции искаженного изображения использованы метод преобразования Фурье с регуляризацией Тихонова и метод квадратур (также с регуляризацией). Приведены численные иллюстрации, показавшие, что предложенная в работе методика заметно снижает погрешность реконструкции.

Ключевые слова: смаз изображения, функция рассеяния точки, граничные условия, поле зрения, эффект звона

Коды OCIS: 100.0100, 100.2000

Поступила в редакцию 03.12.2008

Введение

В данной работе рассматривается задача реконструкции искаженных (смазанных или/и зашумленных) изображений [1, 2]. Рассматривается как прямая задача (моделирование искажения или экспериментальное получение реального искаженного изображения), так и обратная задача (реконструкция, восстановление изображения) [2–4].

Основные соотношения и уравнения, описывающие эти задачи в непрерывном виде, известны по работам [2–11]

$$(1/\Delta) \int_x^{x+\Delta} w_y(\xi) d\xi = g_y(x) + \delta g, \quad (1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x) + \delta g, \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x-\xi, y-\eta) w(\xi, \eta) d\xi d\eta = g(x, y) + \delta g. \quad (3)$$

Здесь Δ – смаз, h – функция рассеяния точки (ФРТ), обычно пространственно-инвариантная, w и g – распределение интенсивности по неискаженному и искаженному изображени-

ям соответственно, δg – помеха. В (1) и (2) ось x направлена вдоль смазы, а y играет роль параметра.

Интегральные уравнения (1) и (2) обычно используются в задаче смазывания, а (3) – в задаче дефокусирования, но часто, например, в работах [2, 5] уравнение (3) используется для решения обеих задач. Интегральные уравнения (2), (3) обычно решаются методами инверсной фильтрации, параметрической винеровской фильтрации, регуляризации Тихонова (прямой и итеративный вариант), простой итерации Фридмана, итераций Ландвебера, сопряженных градиентов (СГ) и др. При численной реализации методов используются преобразование Фурье (ПФ), квадратуры, итерации и т. д.

Часто используются, например, в работах [9, 11–14] так называемые граничные условия (ГУ): нулевые по Дирихле, периодические, копирующие границу, рефлексивные (симметричные) относительно границы, анти-рефлексивные относительно границы для учета интенсивностей вне заданных границ изображения [12, 13], когда функция w не является финитной, т. е. носитель изображения в действительности шире заданной области g . Непрерывным уравнениям (1)–(3) можно поставить в соответствие дискретные выражения (1)–(3) вида

$$g = Aw + \delta g, \quad (4)$$

где A – матрица, связанная с ФРТ и с граничными условиями: в случае нулевых условий матрица A есть блок теплицевых матриц, в случае периодических условий – блок циркулянтных матриц, в случае рефлексивных относительно границы – сумма блоков теплицевых и ганкелевых матриц [12]. Заметим, что в некоторых случаях искомую функцию w можно считать финитной, например, когда рассматривается космический объект [12, рис. 4]. Однако гораздо чаще искомая функция w не является таковой, как например, в работе [10, рис. 1], хотя авторы этой работы положили, что w финитна и, по существу, использовали нулевое граничное условие.

Основная цель данной работы – показать, что в случае, когда функция w не является финитной, т. е. w отлична от нуля в более широкой области, чем область поля зрения (FOV), можно адекватно решать как прямую, так и обратную задачу, не используя граничные условия. Данная работа продолжает работы [4, 7, 8, 15, 16].

Прием усечения изображения

О граничных условиях. Рассмотрим прямую задачу моделирования искажения изображения. Пусть нам дано исходное (неискаженное) изображение размером $m \times n$ пикселов, описываемое матрицей интенсивностей $w_{m \times n}$. Назовем область $D_{m \times n}$ заданной областью исходного изображения (FOV), а границу B этой области – границей исходного изображения.

В редких случаях (когда, например, исходное изображение является изображением космического объекта) функцию w можно считать финитной, т. е. равной нулю вне области D . В этом случае можно без потери информации моделировать искаженное изображение по формуле типа (4), положив размеры матрицы g , равными размерам матрицы w , и используя при этом нулевое граничное условие. Аналогично, при решении обратной задачи (реконструкции изображения) можно без потери информации полагать размеры матриц w и g одинаковыми, т. е. считать, что $w = 0$ вне области D .

Однако авторы данной работы, как и авторы работ [9, 11–14] рассматривают более типичный случай, когда вне области D интенсивности w , вообще говоря, отличны от нуля, но информация об этих интенсивностях отсутствует. В этом случае (при моделировании искажения, а также при решении обратной задачи) обычно используют

ГУ, наиболее эффективными из которых считаются анти-рефлексивные, и которые являются по существу различными вариантами экстраполяции значений w за границу B . Однако, во-первых, введение BCs является довольно искусственным приемом, а во-вторых, их использование порождает сложный математический аппарат. В данной работе предлагается более простое решение этой проблемы, которое будем называть приемом усечения изображения.

Усечение смазанного изображения. Рассмотрим простейший пример моделирования равномерного прямолинейного горизонтального смазывания изображения (прямая задача). Пусть нам дана матрица исходного изображения $w_{m \times n}$ и необходимо смоделировать матрицу смазанного изображения g при смазе Δ и при нулевом угле смаза (горизонтальный смаз). Если формировать смазанное изображение такого же размера, как и исходное изображение, т. е. формировать g шириной n , то соотношение (4) более подробно запишется в виде (при замене интеграла в (1) конечной суммой по пикселям, без помехи)

$$g_j(i) = \frac{1}{\Delta+1} \sum_{k=i}^{i+\Delta} w_j(k), \quad (5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где i (и k) – номер столбца, j – номер строки. В (5) перед знаком суммы поставлен множитель $1/(\Delta+1)$ потому, что при $\Delta = 0$ выражение (5) должно переходить в $g_j(i) = w_j(i)$. Заметим, что в выражении (1) перед знаком интеграла поставлен множитель $1/\Delta$, чтобы при $\Delta \rightarrow 0$ соотношение (1) переходило (без помехи) в $w_j(x) = g_j(x)$ [4, с. 66].

Из (5) видно, что при $i = n - \Delta + 1, \dots, n$ требуется знание значений $w_j(1), \dots, w_j(n + \Delta)$, однако значения $w_j(n + 1), \dots, w_j(n + \Delta)$ неизвестны. Чтобы преодолеть этот недостаток информации, в обширном цикле работ [11–14] предложены и используются граничные условия (было бы более точно назвать их внеграницными условиями): от простейшего нулевого до анти-рефлексивного, в которых делаются различные предложения относительно недостающих значений $w_j(n + 1), \dots, w_j(n + \Delta)$.

Авторы статьи предлагают иное решение данного вопроса, а именно, вместо соотношений (5) использовать соотношения (рис. 1)

$$\hat{g}_j(i) = \frac{1}{\Delta+1} \sum_{k=i}^{i+\Delta} w_j(k), \quad (6)$$

$$i = 1, 2, \dots, n - \Delta, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

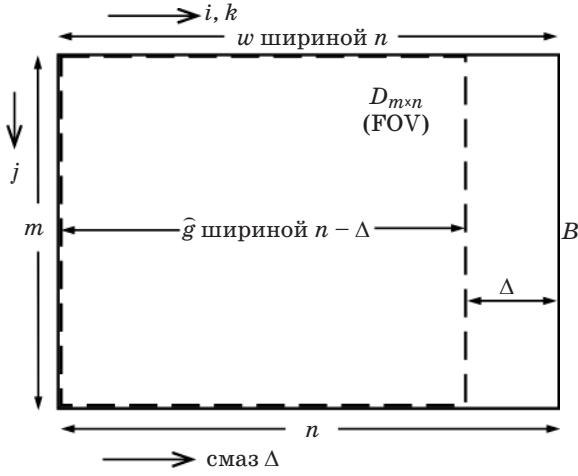


Рис. 1. Схема получения смазанного изображения с усечением.

Отличие выражения (6) от (5) состоит в том, что согласно (6) моделируется более узкое смазанное изображение. При этом требуются значения $w_j(1), \dots, w_j(n)$, которые известны, и не нужно прибегать к такому приему как граничные условия. Правда, \hat{g} получается несколько уже, чем w (на Δ пикселов). Но, во-первых, практически эффект заужения невелик (обычно $n \approx 300 \div 600$, а $\Delta \sim 10$), а, во-вторых, при решении обратной задачи, например, методом регуляризации Тихонова эффективно решается недоопределенная система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), вытекающая из выражения (6). Назовем вариант моделирования смазанного изображения на основе (6) приемом усечения искаженного изображения.

Схема для понижения эффекта Гиббса. Для сравнения рассмотрим схему с искусственным введением размытых краев у изображения (рис. 2)

$$g_j(i) = \frac{1}{\Delta+1} \sum_{k=i}^{i+\Delta} q_j(k), \quad (7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n + \Delta, \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

где

$$q_j(k) = \begin{cases} w_j(k - \Delta), & 1 \leq k - \Delta \leq n, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (8)$$

Изображение g согласно выражению (7) получается шириной $n + \Delta$ с размытыми левым и правым краями. Заметим, что введение размытых краев не следует рассматривать как переход к финитности функций w . Введение размытых краев направлено на понижение возможных искажений типа “звона” (ложных волн, эффекта

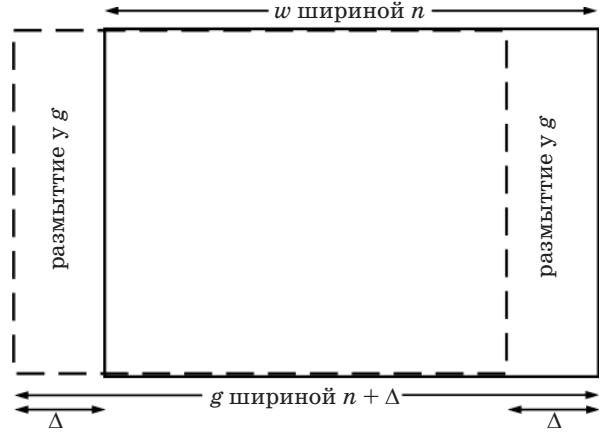


Рис. 2. Схема с введением размытых краев у изображения g .

Гиббса) [9, 13] при решении обратной задачи. Для их подавления можно воспользоваться m -функцией *edgetaper* [9] системы *MatLab*, также размывающей края изображения g , однако схема (7), как показало моделирование, является более эффективной.

Обратная задача. Рассмотрим задачу реконструкции смазанного изображения. Она сводится к решению одномерного интегрального уравнения Фредгольма I рода типа свертки (2) относительно $w_y(\xi)$ при каждом фиксированном значении y , играющем роль параметра. В уравнении (2), получаемом в результате преобразования уравнения (1) [3, 4, 6], ФРТ выражается формулой

$$h(x - \xi) = \\ = \begin{cases} 1/\Delta, & x \leq \xi \leq x + \Delta \text{ или } -\Delta \leq x - \xi \leq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (9)$$

Решение уравнения (2) методом ПФ с регуляризацией Тихонова имеет вид [4–8, 17]

$$w_{ay}(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_{ay}(\omega) e^{-i\omega\xi} d\omega, \quad (10)$$

где

$$W_{ay}(\omega) = \frac{H(-\omega)G_y(\omega)}{|H(\omega)|^2 + \alpha\omega^{2p}}, \quad (11)$$

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{i\omega x} dx, \quad G_y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g_y(x) e^{i\omega x} dx,$$

$\alpha > 0$ – параметр регуляризации, $p \geq 0$ – порядок регуляризации. Далее метод ПФ с регуляри-

зацией в дискретном виде реализован в двух вариантах

вариант 1 – на основе использования \hat{g} (6), в этом случае матрица реконструированного изображения \hat{w}_α имеет размер $m \times (n - \Delta)$;

вариант 2 – на основе использования g (7), в этом случае матрица w_α имеет размер $m \times (n + \Delta)$. Предлагается в конце решения варианта 2 делать усечение левого края матрицы w_α на Δ пикселов, в результате чего ее размер станет равным $m \times n$.

Рассмотрим также решение уравнения (2) методом квадратур с регуляризацией Тихонова. Запишем уравнение (2) в виде уравнения общего типа

$$Aw_y \equiv \int_a^b h(x, \xi) w_y(\xi) d\xi = g_y(x), \quad (12)$$

$c \leq x \leq d,$

где

$$h(x, \xi) = \begin{cases} 1/\Delta, & x \leq \xi \leq x + \Delta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (13)$$

Здесь A – интегральный оператор. В дискретном виде, заменяя интеграл в уравнении (12) конечной суммой, получим для схемы с усечением (6) вариант 3

$$Aw_j \equiv \sum_{k=1}^n \hat{h}_{ik} w_{j,k} = \hat{g}_{j,i}, \quad (14)$$

$i = 1, \dots, n - \Delta, \quad j = 1, \dots, m,$

где

$$\hat{h}_{ik} = \begin{cases} 1/(\Delta + 1), & i \leq k \leq i + \Delta, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (15)$$

Для схемы с размытыми краями (7) получим вариант 4

$$Aw_j \equiv \sum_{k=1}^n h_{ik} w_{j,k} = g_{j,i}, \quad (16)$$

$i = 1, \dots, n + \Delta, \quad j = 1, \dots, m,$

$$h_{ik} = \begin{cases} 1/(\Delta + 1), & i - \Delta \leq k \leq i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (17)$$

Рассмотрим для полноты также вариант 5 двойного усечения, когда в схеме на рис. 1 усекается как g , так и w до размера $m \times (n - \Delta)$

$$A\hat{w}_j \equiv \sum_{k=1}^{n-\Delta} \hat{h}_{ik} \hat{w}_{j,k} = \hat{g}_{j,i}, \quad (18)$$

$i = 1, \dots, n - \Delta, \quad j = 1, \dots, m.$

В соотношениях (14), (16), (18) A – (ленточная) матрица при каждом фиксированном номере строки j , причем A – матрица размера $(n - \Delta) \times n$ в (14), $(n + \Delta) \times n$ в (16) и $(n - \Delta) \times (n - \Delta)$ в (18). При каждом фиксированном j имеется СЛАУ относительно искомого вектора w или \hat{w} . При этом СЛАУ (14) является недоопределенной, СЛАУ (16) – переопределенной, а СЛАУ (18) – определенной. Чтобы реконструировать все изображение, нужно при каждом j (т. е. m раз) решить подобную СЛАУ.

Более кратко запишем СЛАУ (14), (16), (18) в виде

$$Aw = g. \quad (19)$$

Решение СЛАУ (19) методом регуляризации Тихонова [4, 8, 11, 13, 17] имеет вид

$$w_\alpha = (\alpha I + A^T A)^{-1} A^T g, \quad (20)$$

где I – единичная матрица, A^T – транспонированная матрица. Отличительной особенностью метода регуляризации Тихонова является то, что он позволяет решить недоопределенную, переопределенную и определенную СЛАУ, давая приближение к точному решению, в качестве которого выступает нормальное псевдорешение (оно существует и является единственным) [3, 17].

Прием усечения, изложенный применительно к равномерному прямолинейному горизонтальному смазыванию изображения, может быть распространен на смазывание под углом, дефокусирование с различными ФРТ и проч. Эти варианты приема усечения изображения будут рассмотрены в последующих публикациях авторов настоящей статьи.

Численные иллюстрации

В рамках системы программирования *MatLab7* авторами был разработан ряд m -функций для моделирования прямой задачи смазывания изображения согласно выражениям (6)–(8) и решения обратной задачи реконструкции изображения согласно выражениям (10), (11) (варианты 1, 2) и (12)–(20) (варианты 3–5). В прямой задаче изображения смазывались и зашумлялись аддитивным гауссовым шумом. При решении обратной задачи параметр регуляризации α (11, 20) выбирался двумя способами: путем визуальной оценки реконструированного изображения w_α , путем минимизации относительного среднеквадратического отклонения (СКО) изображения w_α от исходного точного изображения \bar{w} [18]

$$\sigma_{\text{rel}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n [(w_\alpha)_{ji} - \bar{w}_{ji}]^2}}{\sqrt{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \bar{w}_{ji}^2}} \quad (21)$$

(σ_{reg} можно вычислить лишь в модельной задаче, когда \bar{w} известно).

На рис. 3 дано исходное серое изображение *cameraman.tif* w размером 256×256 пикселов, а на рис. 3б – смазанное ($\Delta = 10$) и зашумленное гауссовым шумом $\|\delta g\|/\|g\| = 0,01 = 1\%$ изображение с усечением \hat{g} 256×246 (между белыми вертикальными линиями), а также изображение с размытыми краями g 256×266 (во всю ширину рис. 3б).

На рис. 4 приведены кривые зависимости σ_{rel} (α) при 1%-шуме и при $p = 1$ (11) для вариантов 1–5. Кривые построены в результате усреднения по 10 реализациям шумов. Видно, что кривые 3 и 4 имеют наиболее глубокие и широкие минимумы.

Для сравнения рассмотрен также вариант 6 – реконструкция изображения методом параметрической фильтрации Винера с использованием граничных условий [2, 9]. В варианте 6 использованы следующие m -функции системы *MatLab7*: *fspecial*, *imfilter* (с опциями *circular* (*periodic*) и *symmetric* (*reflective*)) и *deconvwnr* [9]. При этом в методе параметрической фильтрации Винера в качестве константы K [2, с. 392] использовано отношение шум/сигнал по мощности $K = \|\delta g\|^2 / \|g\|^2$ (параметр *nsr* функции *deconvwnr*). На рис. 4 пунктиром отмечены значения σ_{rel} для варианта 6с – варианта 6 с опцией *circular* и варианта 6s – варианта 6 с опцией *symmetric*.

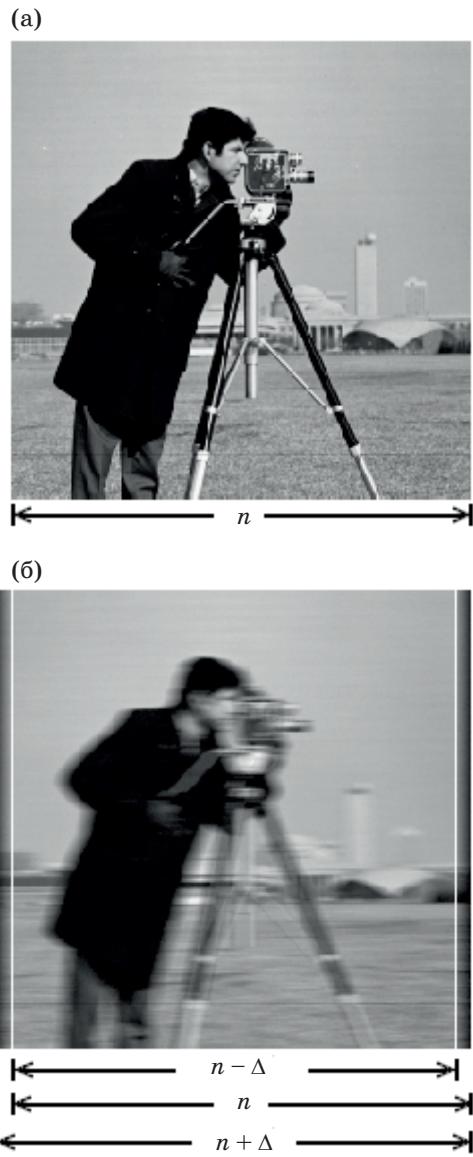


Рис. 3. а – исходное изображение w . б – смазанное и зашумленное изображение \hat{g} и g .

Значения α_{opt} и σ_{rel} , усредненные по 10 реализациям шума ($\Delta = 10, p = 1$)

Отн. шум $\frac{\ \delta g\ }{\ g\ }$	Вариант										6c	6s
	1		2		3		4		5			
	$\lg \alpha_{\text{opt}}$	$\sigma_{\text{rel}}(\alpha_{\text{opt}})$	σ_{rel}	σ_{rel}								
0	-2,1	0,15	-2,7	0,15	≤ -5	0,038	< -14	$< 5 \times 10^{-12}$	-1,0	0,22	0,058	0,15
$0,001 = 0,1\%$	-2,1	0,15	-2,6	0,15	-4,1	0,045	-4,3	0,026	-1,0	0,22	0,062	0,15
$0,01 = 1\%$	-2,1	0,15	-2,5	0,15	-2,4	0,10	-2,3	0,090	-1,0	0,22	0,205	0,23
$0,03 = 3\%$	-2,0	0,17	-2,3	0,17	-1,7	0,15	-1,5	0,13	-1,0	0,22	0,30	0,31
$0,09 = 9\%$	-1,6	0,20	-1,8	0,21	-1,2	0,20	-1,1	0,18	-0,9	0,23	0,31	0,32

Было выполнено также решение вариантов 1–6 при других значениях шума $\|\delta g\|/\|g\|$. В таблице приведены значения α_{opt} и $\sigma_{\text{rel}}(\alpha_{\text{opt}})$ для ряда значений шума для вариантов 1–5, а также значения σ_{rel} для вариантов 6с и 6s. Здесь α_{opt} – значение α , при котором $\sigma_{\text{rel}} = \min$. Значение α_{opt} можно определить лишь при решении модельных примеров. При обработке же реальных изображений значение α , близкое к α_{opt} , можно выбрать путем визуальной оценки изображения (способом подбора [4, 7]) или такими способами, как обобщенный принцип невязки [19], локальный регуляризирующий алгоритм [20] и др.

Анализ рис. 4 и таблицы позволяет сделать следующие выводы:

- метод квадратур (с регуляризацией Тихонова) более точен, чем метод ПФ (также с регуляризацией) (ср. варианты 1 и 3 или 2 и 4), и это можно объяснить тем, что операция квадратуры (суммирования, накопления) более адекватна физической природе искажения;

- использование схемы с искусственным размытием краев у искаженного изображения (см. (7) и рис. 2) дополнительно понижает погрешность реконструкции σ_{rel} , в первую очередь, при использовании метода квадратур (ср. варианты 3 и 4) и особенно при малых шумах ($<1\%$);

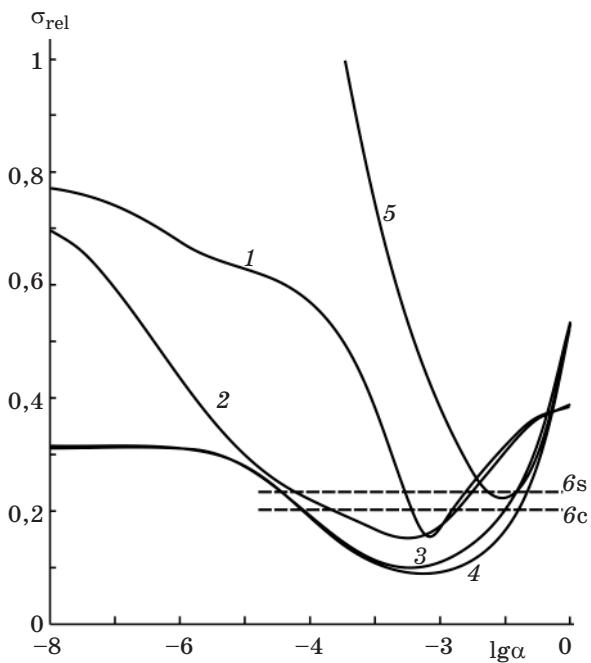


Рис. 4. Зависимости $\sigma_{\text{rel}}(\alpha)$ для вариантов 1–5 и значения σ_{rel} для вариантов 6с и 6s при относительном уровне гауссова шума $\|\delta g\|/\|g\| \approx 0,01 = 1\%$ (цифрами указаны номера вариантов).

– наименее точным является вариант 5, что можно объяснить несоответствием прямой задачи (6) и обратной задачи (18), а именно тем, что в прямой задаче используются значения w правого края изображения шириной Δ , а в обратной задаче они исключаются из рассмотрения;

– варианты 3 и 4 заметно точнее (при всех значениях шума) и варианты 1 и 2 также точнее (при шуме $\geq 1\%$), чем метод параметрической фильтрации Винера с использованием граничных условий (варианты 6с и 6s).

Результаты, представленные в работе [13, табл. 2], показывают, что при искажении изображения *cameraman* гауссовым окном 30×30 пикселов (что примерно соответствует $\Delta = 10$, если судить по ФРТ [13, рис. 2]) и зашумлении 1% -шумом ($\text{SNR} = 40$) реконструкция изображения алгоритмами *deblurring* и *re-blurring* (с СГ-регуляризацией [21]) выполняется с относительной погрешностью примерно 0,23 (для граничных периодических условий), 0,20 (рефлексивных) и 0,19 (анти-рефлексивных), т. е. заметно грубее, чем вариантом 4, а также 3, 2 и 1. Результаты, аналогичные [13], даны также в работе [11, табл. 7.2].

На рис. 5 представлены результаты реконструкции изображения, выполненные согласно вариантам 1–4 при $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ и вариантам 6с и 6s при $\|\delta g\|/\|g\| = 1\%$. Видно, что все варианты отягощены артефактами, или ложными волнами, на изображении – проявление эффекта Гиббса, при этом наименьший эффект Гиббса и наилучшее восстановление дает вариант 4 как с позиций зрительного восприятия изображения, так и по критерию минимума СКО σ_{rel} .

На рис. 6 для сравнения приведены реконструированные изображения, полученные в отсутствие шума δg согласно варианту 4 при $\alpha = \alpha_{\text{opt}} = 10^{-14}$ и вариантам 6с и 6s. Видно, что изображение согласно варианту 4 восстановилось практически точно ($\sigma_{\text{rel}} < 5 \times 10^{-12}$), вариант 6с дал заметно менее точное восстановление ($\sigma_{\text{rel}} = 0,058 = 5,8\%$), а вариант 6s дал еще меньшую точность ($\sigma_{\text{rel}} = 0,15$) к тому же со значительными ложными волнами. Это говорит о том, что вариант 4 (реконструкция методом квадратур с регуляризацией с использованием приема усечения и с введением размытых краев) дает заметно более точное восстановление смызанного незашумленного изображения, чем вариант 6 (реконструкция методом параметрической фильтрации Винера с использованием граничных условий). Обработка других изображений (*girl.tif* из работы [10], *plane.bmp* из работы [8] и др.) подтверждает сделанные выводы.

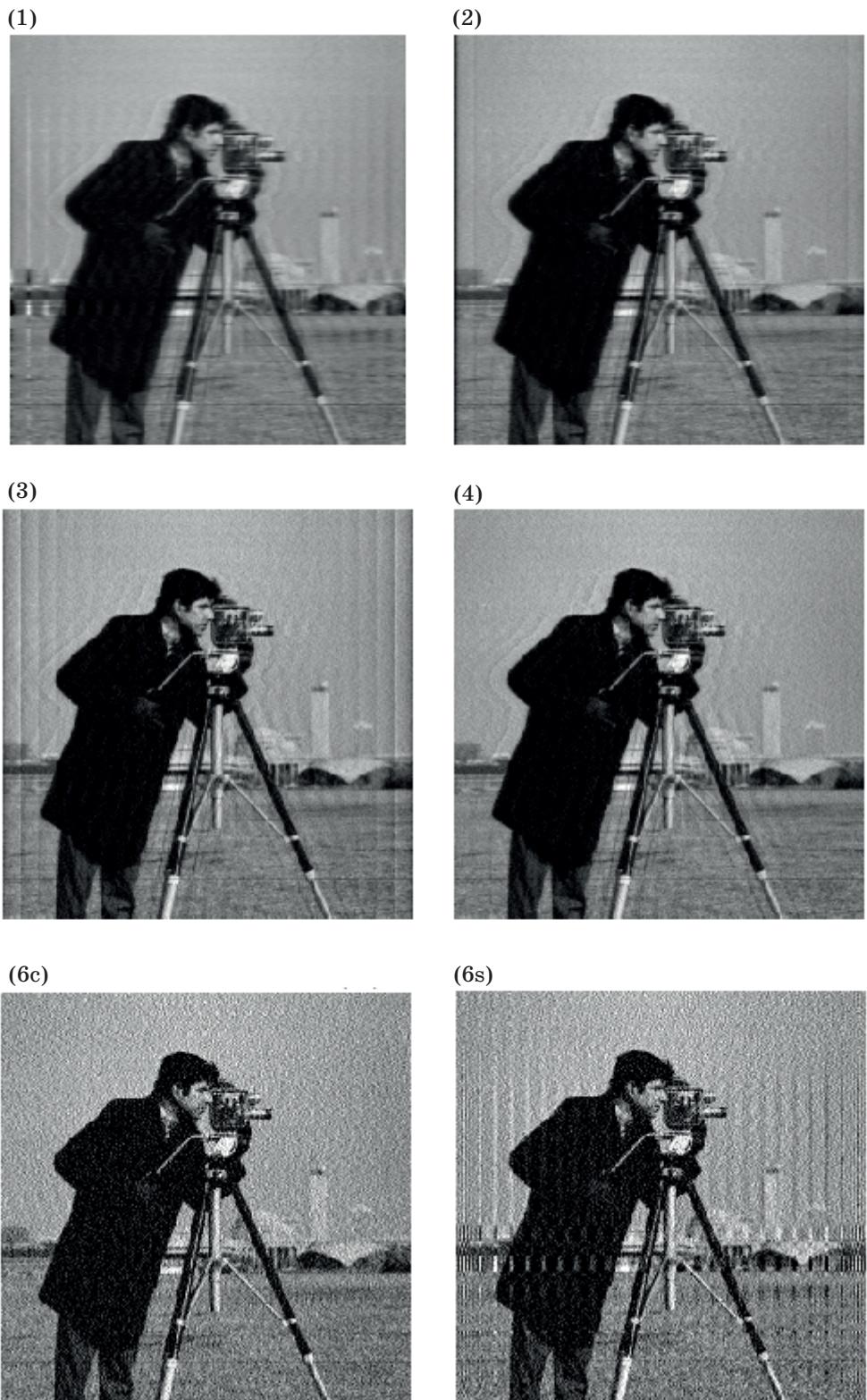


Рис. 5. Реконструкции изображения согласно вариантам 1–4 при $\alpha = \alpha_{\text{opt}}$ и вариантам 6с и 6s при шуме $\|\delta g\|/\|g\| = 1\%$.

Отметим, что в данной работе не рассмотрены такие важные вопросы, как смазывание под углом, быстрый алгоритм реконструкции, реконструкция дефокусированных изображений, способы определения ФРТ при обработке

реальных изображений, влияние погрешностей в определении ФРТ на точность реконструкции, реконструкция цветных изображений. Эти вопросы будут рассмотрены (с использованием приема усечения) в дальнейших публикациях.

(4)



(6c)



(6s)



Рис. 6. Реконструированное изображение в отсутствие шума, варианты 4, 6с и 6с.

Заключение

В работе изложен новый подход к проблеме учета интенсивностей из точек вне заданной области изображения. Вместо введения так называемых граничных условий предло-

жен прием усечения, не использующий интенсивности вне FOV. На основе приема усечения выведены основные формулы для прямой и обратной задачи сглаживания изображения.

Для решения обратной задачи реконструкции изображения использованы метод преобразования Фурье с регуляризацией Тихонова и метод квадратур с регуляризацией. Решение модельных примеров показало следующее. Метод квадратур дает лучшее восстановление изображений, чем метод ПФ. Метод регуляризации Тихонова достаточно эффективно устраняет сглаживание изображения, а также фильтрует шумы на изображении.

Основной результат работы состоит в том, что применение приема усечения в соединении с методом квадратур и регуляризации позволяет реконструировать искаженные и зашумленные изображения с большей точностью, чем метод параметрической фильтрации Винера, алгоритмы *deblurring* и *re-blurring* и подобные, использующие граничные условия.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 09-08-00034-а).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтс Р., Мак-Доннелл М. Восстановление и реконструкция изображений. М.: Мир, 1989. 336 с.
2. Гонсалес Р., Будс Р. Цифровая обработка изображений. М.: Техносфера, 2006. 1072 с.
3. Бакушинский А.Б., Гончарский А.В. Некорректные задачи. Численные методы и приложения. М.: изд-во МГУ, 1989. 199 с.
4. Сизиков В.С. Математические методы обработки результатов измерений. СПб.: Политехника, 2001. 240 с.(эл.вариант:<http://dsp-book.narod.ru/SIZIKOV.pdf>).
5. Арефьева М.В., Сысоев А.Ф. Быстрые регуляризирующие алгоритмы цифрового восстановления изображений // Вычислите. методы и программирование. 1983. В. 39. С. 40–55.
6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В. Обратные задачи обработки фотоизображений // Некоторые задачи естествознания / Под ред. Тихонова А.Н., Гончарского А.В. М.: изд-во МГУ, 1987. С. 185–195.
7. Сизиков В.С., Белов И.А. Реконструкция сглаженных и дефокусированных изображений методом регуляризации // Оптический журнал. 2000. Т. 67. № 4. С. 60–63.
8. Petrov Yu.P., Sizikov V.S. Well-Posed, Ill-Posed, and Intermediate Problems with Applications. Leiden–Boston: VSP, 2005. 234 p.
9. Гонсалес Р., Будс Р., Эддинс С. Цифровая обработка изображений в среде MATLAB. М.: Техносфера, 2006. 616 с.

10. Воскобойников Ю.Е., Литасов В.А. Устойчивый алгоритм восстановления изображения при неточно заданной аппаратной функции // Автометрия. 2006. Т. 42. № 6. С. 3–15.
11. Christiansen M., Hanke M. Deblurring methods using antireflective boundary conditions, 2006, <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.70.9837&rep=rep1&tipe=pdf>
12. Palmer K., Nagy J., Perrone L. Iterative methods for image restoration: Matlab object oriented approach, 2002, <http://citeseer.ist.psu.edu/lee02iterative.html>
13. Donatelli M., Estatico C., Martinelli A., Serra-Capizzano S. Improved image deblurring with anti-reflective boundary conditions and re-blurring // Inverse problems. 2006. V. 22. P. 2035–2053.
14. Arico A., Donatelli M., Nagy J., Serra-Capizzano S. The anti-reflective transform and regularization by filtering. Technical report TR-2007-006-A, <ftp://ftp.mathcs.emory.edu/pub/techreport/TR-2007-006-A.pdf>
15. Римских М.В., Евсеев В.О., Сизиков В.С. Реконструкция смазанных изображений различными методами // Оптический журнал. 2007. Т. 74. № 11. С. 53–57.
16. Сизиков В.С. Реконструкция искаженных изображений методом регуляризации (новый подход) // Тез. докл. Международ. конф., посвящен. 100-летию В.К. Иванова. Екатеринбург: изд-во УрГУ, 2008. С. 155–156.
17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 544 с.
18. Пикалов В.В., Непомнящий А.В. Итерационный алгоритм с вэйвлет-фильтрацией в задаче двумерной томографии // Вычислит. методы и программирование. 2003. Т. 4. С. 244–253.
19. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Численные методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1990. 232 с.
20. Воскобойников Ю.Е., Мухина И.Н. Локальный регуляризующий алгоритм восстановления контрастных сигналов и изображений // Автометрия. 2000. № 3. С. 45–53.
21. Engl H., Hanke M., Neubauer A. Regularization of Inverse Problems. Dordrecht: Kluwer, 1996.