УДК 681.7.013.1

ГЕОМЕТРЧЕСКИЕ И ОПТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АФОКАЛЬНОЙ ДВУХЗЕРКАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

© 2009 г. **В. И. Батшев**; **Д. Т. Пуряев**, доктор техн. наук

Московский Государственный Технический Университет им. Н.Э. Баумана, Москва

E-mail: batshev_vlad@mail.ru

Установлена связь между математическими выражениями продольных аберраций нормалей поверхностей, образующих афокальную двухзеркальную систему (АДС), исправленную на сферическую аберрацию для осевого пучка лучей, получено обобщенное глобальное решение АДС. Разработан алгоритм для расчета наклонных меридиональных пучков лучей, идущих через АДС.

Коды OCIS: 120.4640.

Поступила в редакцию 02.06.2008.

Введение

АДС широко применяются в лазерной технике и в оптическом приборостроении. Среди возможных сфер применения можно назвать следующие: астрономия, лазерная локация, оптическая связь, интерферометрия и др. Одна из таких систем, состоящая из двух параболических зеркал, известна под названием системы Мерсена [1]. Она полностью свободна от сферической аберрации при любых апертурах зеркал, в области аберраций третьего порядка отсутствуют кома и астигматизм, но кривизна поля принципиально неустранима. Система Пуряева [2], у которой одно из зеркал сферическое, а другое – асферическое, строго эквидистантное мнимому параболоиду, также является АДС с полностью исправленной сферической аберрацией и имеет над системой Мерсена важные технологические преимущества.

Но и система Мерсена, и система Пуряева являются лишь частными случаями глобального решения АДС, полученного профессором Д.Т. Пуряевым [3] в 1988 году. Оно представляет собой соотношения, позволяющие по известному параметрическому уравнению одной из поверхностей системы определить параметрическое уравнение другой поверхности при условии выполнения принципа Ферма для осевого пучка лучей. В качестве параметра в уравнениях поверхностей выступает угол наклона нормали.

Эти соотношения были получены сравнительно недавно, и с тех пор было проведено не так много исследований, направленных на изучение свойств АДС. А изучение свойств – это путь к открытию новых ее возможностей. На это и направлена данная работа. В ней установлено новое общее для всех вариантов АДС ее геометрическое свойство, показывающее связь между математическими выражениями продольных аберраций нормалей поверхностей, образующих АДС. Получена интерпретация глобального решения, дающая новый способ построения поверхности АДС при известном уравнении другой поверхности. Разработан алгоритм для исследования оптических свойств различных вариантов АДС, позволяющий производить расчет наклонных меридиональных пучков и принципиально отличающийся от уже существующих алгоритмов тем, что для расчета хода лучей поверхности могут быть заданы в параметрическом виде.

Геометрические свойства афокальной двухзеркальной системы

Объект исследования

Рассмотрим АДС (рис. 1), состоящую из малого зеркала oA и большого OB. Используем две системы координат: zoy для зеркала oA и ZOY для зеркала OB. Оси oz и OZ совмещены с оптической осью системы. Точки E и C являются центрами кривизны при вершинах большого и малого зеркал соответственно, φ – параметр (угол наклона нормали к поверхности). Расстояние между зеркалами равно d.

На схеме (рис. 1) изображена так называемая предфокальная АДС. Параксиальные радиусы кривизны поверхностей ($r_1 = r$ и $r_2 = R$) имеют одинаковые знаки (оба положительны), причем $R > r$. Это лишь один из возможных вариантов конструктивного исполнения системы. Приведенные в этом разделе геометрические соотношения и выводы справедливы для этого вида АДС, для других вариантов могут быть получены аналогичные по структуре и сути результаты.

В начале рассуждений следует привести два важных соотношения, справедливые для всех вариан-

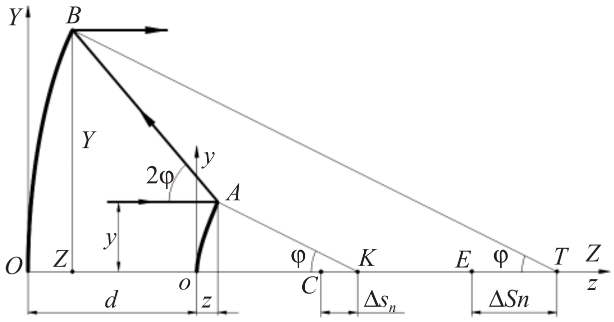

Рис. 1. Афокальная двухзеркальная система.

тов АДС, полностью свободной от сферической аберрации для осевого пучка лучей.

Из условия афокальности системы, т.е. совмещения фокусов зеркал, следует параксиальное соотношение, позволяющее рассчитать осевое расстояние между вершинами зеркал

$$d = 0{,}5(R - r), \tag{1}$$

где R и r – радиусы кривизны при вершинах большого и малого зеркал соответственно, d – осевое расстояние между поверхностями.

Глобальное решение АДС, связывающее между собой параметрические уравнения поверхностей, записывается в виде

$$\begin{cases} Z(\varphi) - z(\varphi) = d\,\mathrm{tg}^2\varphi \\ Y(\varphi) - y(\varphi) = 2d\,\mathrm{tg}\varphi \end{cases}, \tag{2}$$

где Z, Y – координаты на поверхности большого зеркала в системе координат ZOY, z, y – координаты на поверхности малого зеркала в системе координат zoy (см. рис. 1), φ – параметр (угол наклона нормали к поверхности).

Следующие рассуждения основаны на этих соотношениях и являются продолжением предыдущих исследований АДС.

Связь между продольными аберрациями нормалей поверхностей АДС

Система Мерсена состоит из двух зеркал параболической формы, следовательно, продольные аберрации нормалей ее поверхностей записываются в виде

$$\Delta Sn(\varphi) = 0{,}5R\mathrm{tg}^2\varphi \tag{3}$$

для большого зеркала и

$$\Delta s_n(\varphi) = 0{,}5r\mathrm{tg}^2\varphi \tag{4}$$

для малого.

Если вычесть из уравнения (3) уравнение (4), то получится соотношение

$$\Delta Sn(\varphi) - \Delta s_n(\varphi) = 0{,}5(R - r)\mathrm{tg}^2\varphi,$$

которое с учетом формулы (1) принимает вид

$$\Delta Sn(\varphi) - \Delta s_n(\varphi) = d\mathrm{tg}^2\varphi. \tag{5}$$

Известно, что в системе Пуряева, у которой одно из зеркал (например, малое) сферическое, другое (большое) зеркало представляет собой так называемую эквипараболическую поверхность и имеет продольную аберрацию нормалей, описываемую формулой $\Delta Sn(\varphi) = d\mathrm{tg}^2\varphi$ [2]. Учитывая, что сфера имеет нулевую аберрацию нормалей $\Delta s_n(\varphi) = 0$, можно записать

$$\Delta Sn(\varphi) - \Delta s_n(\varphi) = d\mathrm{tg}^2\varphi. \tag{6}$$

Видно, что выражение (6) идентично выражению (5). Таким образом, в двух различных вариантах АДС наблюдается одна и та же математическая зависимость между продольными аберрациями нормалей зеркал. Логично задаться вопросом: “Только ли для двух вышеуказанных систем справедлива такая зависимость?”

Чтобы ответить на этот вопрос, вспомним, что уравнения поверхностей АДС, полностью свободной от сферической аберрации осевого пучка лучей, удовлетворяют глобальному решению (2).

Параметрические уравнения меридиональных профилей поверхностей большого и малого зеркал записываются в виде

$$\begin{cases} Z(\varphi) = R - F(\varphi) \\ Y(\varphi) = \left[F(\varphi) + \Delta Sn(\varphi)\right]\mathrm{tg}\varphi \end{cases} \tag{7}$$

и

$$\begin{cases} z(\varphi) = r - f(\varphi) \\ y(\varphi) = \left[f(\varphi) + \Delta s_n(\varphi)\right]\mathrm{tg}\varphi \end{cases}, \tag{8}$$

где $F(\varphi)$ и $f(\varphi)$ – некоторые функции параметра φ.

Подставив в (2) уравнения (7) и (8), учитывая соотношение (1), получим

$$\Delta Sn(\varphi) - \Delta s_n(\varphi) = d\mathrm{tg}^2\varphi. \tag{9}$$

Видно, что выражения (5), (6) и (9) идентичны.

Таким образом, полученное для систем Пуряева и Мерсена соотношение, устанавливающее связь между математическими выражениями продольных аберраций нормалей поверхностей, является общим для любых вариантов АДС. Это соотношение может быть использовано, например, для синтеза АДС с определенными свойствами, связанными с аберрацией нормалей одной из поверхностей.

Синтез АДС
с непараметрическими поверхностями

Рассмотрим опять систему уравнений (2). Возведем обе части нижнего уравнения в квадрат и разделим его на верхнее. В результате получим соотношение

$$[Y(\varphi) - y(\varphi)]^2/[Z(\varphi) - z(\varphi)] = 4d.$$

Для удобства опустим параметр φ и перепишем это соотношение в виде

$$(Y - y)^2 = 4d(Z - z). \qquad (10)$$

Выражение (10), если переменными считать величины Z и Y, есть уравнение параболы с фокусным расстоянием d, вершина которой смещена из начала координат в точку с координатами (z, y). На основании этого можно сделать предположение, что кривая, описываемая уравнениями $Z = Z(\varphi)$ и $Y = Y(\varphi)$, есть огибающая семейства вышеупомянутых парабол. Чтобы доказать это предположение, найдем по известной методике (см., например, [4]) уравнение огибающей семейства парабол (10).

Пусть известно параметрическое уравнение меридионального профиля малого зеркала

$$\begin{cases} z = z(\varphi) \\ y = y(\varphi) \end{cases}. \qquad (11)$$

Перепишем уравнение (10) в виде

$$[y(\varphi) - Y]^2 = -4d[z(\varphi) - Z]. \qquad (12)$$

Продифференцируем уравнение (12) по параметру φ

$$2[y(\varphi) - Y]dy(\varphi)/d\varphi = -4ddz(\varphi)/d\varphi. \qquad (13)$$

Известно, что угол наклона нормали φ к кривой (11) в соответствии с правилом знаков определяется из соотношения

$$\mathrm{tg}\varphi = dz/dy. \qquad (14)$$

Выражение (13) с учетом (14) преобразуется к виду

$$Y - y(\varphi) = 2d\mathrm{tg}\varphi. \qquad (15)$$

Из уравнений (12) и (15) следует, что

$$Z - z(\varphi) = d\mathrm{tg}^2\varphi. \qquad (16)$$

Выражения (15) и (16), представляющие собой параметрическое уравнение огибающей семейства парабол (10), совпадают с выражениями глобального решения АДС, что доказывает правильность сделанного предположения.

Таким образом, получено новое свойство АДС.

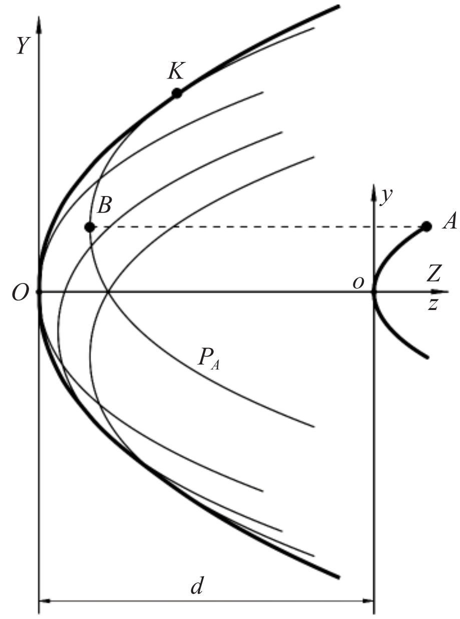

Рис. 2. Геометрическая интерпретация глобального решения АДС.

Меридиональный профиль каждой из поверхностей АДС есть огибающая семейства парабол, фокусное расстояние которых равно осевому расстоянию между поверхностями, причем фокусы парабол лежат на меридиональном профиле другой (исходной) поверхности, а их оси параллельны оптической оси системы.

Так на рис. 2 профиль поверхности большого зеркала OK есть огибающая семейства парабол, одна из которых – кривая P_A – имеет вершину в точке B, а фокус – в точке A, лежащей на профиле исходного малого зеркала OA. Фокусное расстояние параболы равно $BA = d$, а ее ось параллельна оси OZ, т. е. оптической оси АДС. Кривая P_A касается профиля большого зеркала в единственной точке – точке K.

Это свойство позволяет синтезировать АДС, если известно уравнение одной из поверхностей. Важно, что это уравнение может быть задано в любом виде, не обязательно параметрическом.

Алгоритм расчета АДС

В настоящее время ни в одной из известных программ расчета оптических систем, таких как *Opal*, *Prizma*, *Zemax*, *Code V*, нет возможности задать поверхность в параметрическом виде. Это существенно затрудняет анализ работы АДС в наклонных пучках лучей. Есть возможность аппроксимировать параметрически заданную поверхность асферической поверхностью стандартного вида и рассчитать систему в одной из известных программ. При этом произойдет некоторая потеря точности, которую возможно оценить; в некоторых случаях ею даже можно пренебречь. Но этот путь весьма трудоемок и не всегда приводит к удовлетворительным результатам. Поэтому приведенный ниже алгоритм расчета АДС может быть полезным инструментом для разработчика. Этот алгоритм реализован в программе *Mathcad* и позволяет производить расчет наклонных меридиональных пучков лучей через АДС, поверхности которой заданы параметрически.

Анализ системы производится в меридиональном сечении, рассчитываемая АДС задается уравнениями меридиональных профилей ее поверхностей (двумерных кривых) в единой системе координат, как показано на рис. 3. Здесь OA и BD – первая и вторая по ходу лучей поверхности системы. Начало координат – точка O – совпадает с вершиной первой поверхности OA, а ось OZ – с оптической осью.

Кроме уравнений поверхностей пользователем задается угловое поле в пространстве предметов ω, высота луча на входном зрачке Ym, положение входного зрачка MP и плоскости анализа QN.

Положение входного зрачка MP задается относительно вершины первой поверхности отрезком $PO = -Sp$. Положение плоскости анализа NQ задается отрезком $DQ = Sa$ относительно вершины последней поверхности.

Результатом расчета луча через АДС являются высота Yn в плоскости анализа и угол ω' с оптической осью.

На рис. 3 изображена так называемая предфокальная АДС с главным вогнутым и вторичным выпуклым зеркалами, причем $|r_2| < |r_1|$. Это лишь один из возможных вариантов конструкции системы. Алгоритм предназначен для расчета любых исполнений АДС.

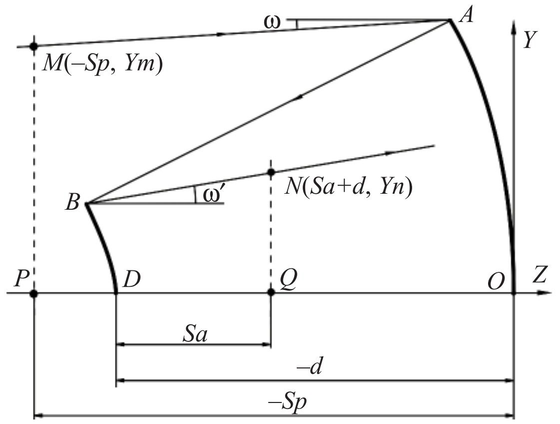

Рис. 3. Способ задания АДС в программе расчета.

Расчет основан на двукратном применении закона отражения луча от поверхности. В начале из исходных данных определяется уравнение луча, входящего в АДС. Затем находятся координаты точки встречи луча с первой поверхностью и угол падения; эти значения дают возможность получить уравнение луча после отражения от первой поверхности. Аналогичные действия проделываются и применительно ко второй поверхности. Результатом этих действий является уравнение луча в системе координат ZOY (рис. 3) после прохождения им АДС, а из уравнения получаются выходные данные.

Определение уравнения прямой в декартовой системе координат по известным координатам одной ее точки и известному углу, который она образует с одной из осей координат – задача тривиальная. Сложнее определить точку встречи луча с меридиональным профилем параметрически заданной поверхности и угол падения луча на эту поверхность. Эта процедура разделяется на два этапа.

Пусть меридиональный профиль рассматриваемой поверхности – кривая, описываемая уравнениями (7). Практически задача сводится к определению значения параметра Φ, соответствующего точке пересечения. А по известному Φ можно определить и координаты искомой точки, и угол падения. На первом этапе определяется приближенное значение параметра $\Phi_{\text{ПР}}$, соответствующее точке пересечения луча с параболой, фокусное расстояние которой равно $0{,}5r$, а вершина совпадает с вершиной рассматриваемой параметрической кривой. На рис. 4а луч, идущий вдоль линии PA, пересекает кривую OA в точке A, нормаль к поверхности, восстановленная в точке A (отрезок NA), образует с оптической осью OZ угол Φ. Кривая OP есть вышеупомянутая парабола, которая пересекается с лучом в точке P. Нормаль MP к параболе OP образует с осью OZ угол $\Phi_{\text{ПР}}$.

Если парабола OP описывается уравнением $y^2 = 2rz$, а прямая PA – уравнением $y(z) = kz + b$, то координата z точки их пересечения определяется по формуле

$$z_P = \left(r - kb \pm \sqrt{r^2 - 2rkb}\right) \Big/ k^2, \tag{17}$$

где знак “+” соответствует отрицательному значению r, а минус – положительному. Известно, что параметрически параболу можно описать уравнениями

$$\begin{cases} z(\varphi) = 0{,}5r\,\mathrm{tg}^2\varphi \\ y(\varphi) = r\,\mathrm{tg}\varphi \end{cases}. \tag{18}$$

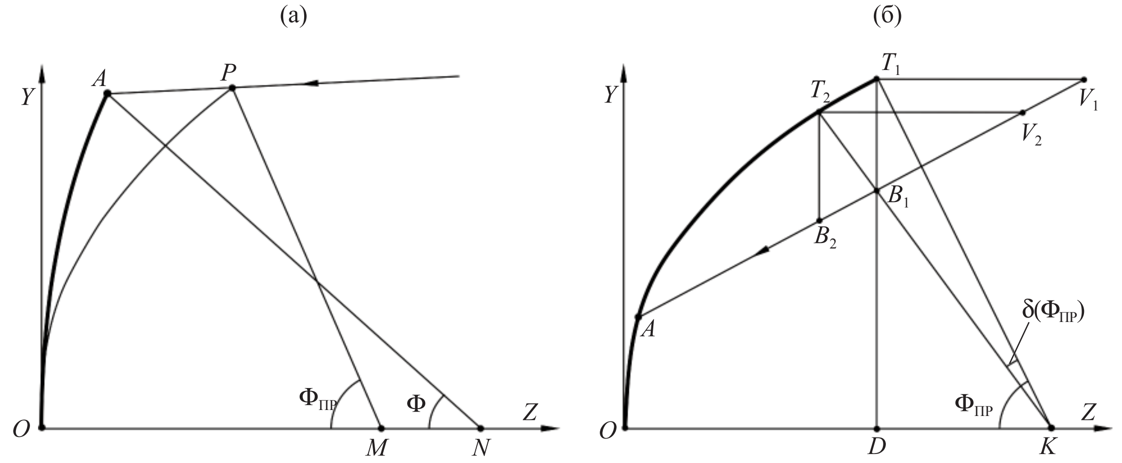

Рис. 4. а – к вопросу об определении предварительного значения параметра (парабола *OP* имеет тот же параксиальный радиус, что и кривая *OA*), б – процедура уточнения параметра.

Так как точка P принадлежит параболе, и ей соответствует значение параметра $\Phi_{ПР}$, то можно записать

$$z_P = 0{,}5r\mathrm{tg}^2\Phi_{ПР} \tag{19}$$

и определить величину $\Phi_{ПР}$.

Второй этап – уточнение параметра $\Phi_{ПР}$ до тех пор, пока его отличие от точного значения Φ не станет малым (каково именно должно быть это отличие, указано ниже).

Для того чтобы понять процедуру уточнения приближенного параметра, обратимся к рис. 4б.

Луч, идущий по направлению V_1A, встречает меридиональную кривую OT_1 в точке A. Предварительно определенному значению параметра $\Phi_{ПР}$ на кривой соответствует точка T_1. Точка V_1 принадлежит лучу и имеет ту же ординату, что и точка T_1. Точка B_1 лежит на пересечении прямых V_1A и T_1D, прямая T_1D перпендикулярна оси OZ. Нормаль к меридиональной кривой, проходящая через точку T_1, пересекает ось OZ в точке K. Так как координаты точек T_1, B_1, K и D известны, то известен и угол $\angle T_1KB_1$, который зависит от значения $\Phi_{ПР}$ и который обозначен через $\delta(\Phi_{ПР})$. Прямая KB_1 пересекает меридиональную кривую в точке T_2. Если пренебречь разностью между продольными аберрациями нормалей к точкам T_1 и T_2, то прямую T_2K можно считать нормалью к кривой, а разность $[\Phi_{ПР} - \delta(\Phi_{ПР})]$ – новым, более точным значением параметра.

Таким образом, по известному значению $\Phi_{ПР}$ определяется $\delta(\Phi_{ПР})$, а разность $[\Phi_{ПР} - \delta(\Phi_{ПР})]$ дает новое значение параметра. Повторяя описанные действия, мы все более приближаем параметр к точному его значению Φ.

После некоторого числа таких итераций параметр φ будет иметь значение Φ_i, ему будут соответствовать точки T_i и V_i. Итерационный цикл прекращается, когда длина отрезка V_iT_i станет меньше некоторого порогового значения ΔL. Чтобы погрешность определения параметра Φ не оказывала заметного влияния на результаты расчета, значение ΔL должно быть существенно (на порядок) меньше погрешности формы зеркала. Например, если поверхность зеркала выполнена и проконтролирована с погрешностью, не превышающей 0,05λ, что для длины волны λ = 0,6328 мкм составляет 0,03 мкм, то значение величины ΔL должно быть не более 0,003 мкм.

Вышеописанный алгоритм уточнения параметра отражается в формуле

$$\Phi_{i+1} = \mathrm{arctg}[y(Z(\Phi_i))\mathrm{tg}\Phi_i/Y(\Phi_i)], \tag{20}$$

где Φ_i и Φ_{i+1} – значения параметра после соответствующей итерации, $Y(\varphi)$ и $Z(\varphi)$ – уравнения, описывающие меридиональную кривую, $y(z) = kz + b$ – уравнение луча.

Вычисления производятся до тех пор, пока не выполнится условие

$$|(Y(\Phi_i) - b)/k - Z(\Phi_i)| \le \Delta L. \tag{21}$$

Алгоритм расчета АДС реализован в программе *Mathcad*, что дает возможность для его модификации. Например, можно рассчитать фокусирующую систему с параметрическими поверхностями или АДС, не исправленную на сферическую аберрацию, можно при необходимости задать большее количество поверхностей, но при этом потребуется модификация некоторых формул. Такие возможности делают алгоритм полезным инструментом для расчета оптических систем с параметрически заданными поверхностями.

Заключение

Глобальное решение АДС в своем первоначальном виде, полученном профессором Д.Т. Пуряевым, представляет собой математическую связь между параметрическими уравнениями поверхностей АДС, свободной от сферической аберрации осевого пучка лучей. Показано, что оно также определяет связь между математическими выражениями продольных аберраций нормалей этих поверхностей и позволяет синтезировать АДС с поверхностями любого (не обязательно параметрического) вида.

Эти результаты расширяют возможности разработчика по синтезу АДС с необходимыми геометрическими свойствами.

Для анализа оптических характеристик системы, состоящей из параметрически заданных отражающих поверхностей, разработан специализированный алгоритм расчета наклонных меридиональных пучков.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михельсон Н.Н.* Оптические телескопы. Теория и конструкция. М.: Наука, 1976. 512 с.
2. *Пуряев Д.Т.* Зеркальная телескопическая система // А. с. СССР № 1527607. Бюл. изобр. 1988. № 45.
3. *Puryayev D.T.* Afokal two-mirror system // Opt. Engin. 1993. V. 32. № 6. P. 1325–1327.
4. *Лузин Н.Н.* Дифференциальное исчисление. М.: Советская наука, 1958. 475 с.