

# РАСЧЕТ, ПРОЕКТИРОВАНИЕ И ПРОИЗВОДСТВО ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

УДК 681.7.08

## ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НОРМАЛЕЙ НЕСФЕРИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

© 2010 г. Е. В. Ермолаева; В. А. Зверев, доктор техн. наук

Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики  
и оптики, Санкт-Петербург

E-mail: post\_vaz@rambler.ru

Получена функциональная зависимость разброса точек пересечения нормалей к несферической поверхности вращения второго порядка с оптической осью от угла между нормалью и осью. Показано, что разброс точек пересечения нормалей к поверхностям эллипсоида и параболоида вращения носит достаточно монотонный характер, а в случае гиперболоида вращения определяется знакопеременным рядом, что определяет требования к коррекционным возможностям оптической системы компенсатора при компенсационном методе контроля формы несферических поверхностей.

**Ключевые слова:** несферическая поверхность, нормаль к несферической поверхности, эквидистантный волновой фронт, контроль, компенсационный метод, компенсатор.

Коды OCIS: 200.0200, 220.0220.

Поступила в редакцию 28.04.2010.

Идея контроля вогнутой отражающей поверхности параболоида вращения компенсационным методом впервые была высказана в 1921 году и практически осуществлена академиком В.П. Линником. В дальнейшем компенсационный метод контроля несферических поверхностей получил развитие в работах Д.Д. МаксUTOва, А. Кудэ, Х.Е. Долла, Ф.Е. Росса, А. Оффнера, Д.Т. Пуряева и других авторов [1, 2].

Сущность компенсационного метода контроля заключается в том, что с помощью дополнительной оптической системы (компенсатора) сферический (в частном случае плоский) волновой фронт преобразуется в несферический, эквидистантный номинальной форме контролируемой несферической поверхности и в конечном счете совпадающий с ней. Вполне очевидно, что волновому фронту, эквидистантному контролируемой несферической поверхности, соответствует продольная сферическая аберрация, эквивалентная разбросу точек пересечения нормалей к контролируемой поверхности с ее геометрической (оптической) осью. Величина

и характер зависимости этого разброса от апертурных координат контролируемой поверхности могут служить исходной информацией для выбора конструкции оптической системы компенсатора в схеме контроля. Определим эти параметры на примере схемы контроля несферических поверхностей вращения второго порядка.

В практике проектирования оптических систем несферическую поверхность второго порядка в декартовой системе координат, начало которой расположено в осевой точке поверхности, а ось  $z$  направлена вдоль оси вращения, принято представлять уравнением вида

$$x^2 + y^2 = 2r_0 z - (1 + \sigma_e) z^2,$$

где  $r_0$  – радиус кривизны в осевой точке поверхности,  $\sigma_e = -e^2$ ,  $e$  – эксцентриситет кривой второго порядка, образующей несферическую поверхность вращения. Константу  $\sigma_e$  принято называть конической константой [3] или коэффициентом деформации сферической поверхности [2]. Иногда оказывается удобным то же уравнение решить относительно координаты  $z$ , представив его в виде

$$z = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \sigma_e)c^2\rho^2}},$$

где  $\rho$  – радиус-вектор точки  $N$ ,  $c = 1/r$ . При этом в общем случае несферическую поверхность вращения можно представить уравнением

$$z = \frac{c\rho^2}{1 + \sqrt{1 - (1 + \sigma_e)c^2\rho^2}} + a_1\rho^4 + a_2\rho^6 + a_3\rho^8 + \dots$$

Тангенс угла  $\gamma$ , под которым нормаль к поверхности пересекает оптическую ось, определяется как

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\gamma = \frac{dz}{d\rho} = & \frac{c\rho}{\sqrt{1 - (1 + \sigma_e)c^2\rho^2}} + \\ & + 4a_1\rho^3 + 6a_2\rho^5 + 8a_3\rho^7 + \dots \end{aligned}$$

При этом расстояние от вершины поверхности до точки пересечения нормали с оптической осью равно

$$\begin{aligned} s' = z + \frac{\rho}{\operatorname{tg}\gamma} = & z + \\ & + \frac{\sqrt{1 - (1 + \sigma_e)c^2\rho^2}}{c + 2\rho^2\sqrt{1 - (1 + \sigma_e)c^2\rho^2}(2a_1 + 3a_2\rho^2 + 4a_3\rho^4 + \dots)}. \end{aligned}$$

При  $\rho = 0$  величина  $s'_0 = 1/c$ . Тогда разброс точек пересечения нормалей с оптической осью  $\Delta s' = s' - s'_0$ .

На рисунке представлена кривая сечения несферической поверхности вращения второго порядка меридиональной плоскостью. Уравнение кривой второго порядка в полярной системе координат имеет вид [4]

$$\rho = \frac{r_0}{1 + e \cos \varphi}, \quad (1)$$

где  $\rho$  – радиус-вектор кривой, равный расстоянию от точки  $N$  кривой до точки геометрического фокуса (полюса)  $F$ ; полярная ось направлена от фокуса к ближайшей вершине кривой;  $r_0$  – параметр, равный радиусу кривизны в осевой точке (в вершине) кривой;  $\varphi$  – полярный угол,  $e$  – эксцентриситет кривой. Введем декартову систему координат  $zOy$ , начало которой  $O$  расположим в вершине кривой. При  $\varphi = 0$  имеем

$$\rho_0 = r_0/(1 + e). \quad (2)$$

При этом осевая координата точки  $N$  равна

$$z = \rho_0 - \rho \cos \varphi = \frac{r_0}{1 + e} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}. \quad (3)$$

Из рисунка находим, что координата  $y$  определяется выражением

$$y = \frac{r_0 \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}. \quad (4)$$

Взяв производные по  $\varphi$  от выражений (3) и (4), получаем

$$\frac{dz}{d\varphi} = \frac{r_0 \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \quad (5)$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = r_0 \frac{e + \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}. \quad (6)$$

При этом тангенс угла между нормалью к кривой в точке  $N$  и оптической осью равен

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dz}{dy} = \frac{\sin \varphi}{e + \cos \varphi}. \quad (7)$$

В соответствии с рисунком отрезок

$$s' = z + \frac{y}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{r_0}{1 + e} \left( 1 + e \frac{1 + e}{1 + e \cos \varphi} \right). \quad (8)$$

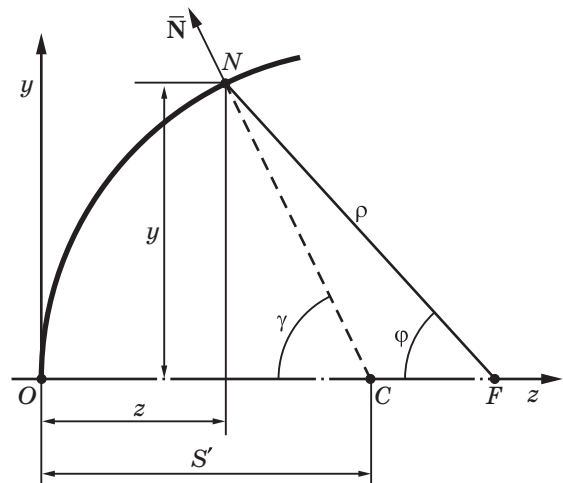
При  $\varphi = 0$  имеем  $s'_0 = r_0$ . Продольная сферическая аберрация при волновом фронте, эквидистантном рассматриваемой поверхности, равная разбросу точек пересечения нормалей к поверхности с оптической осью, определяется разностью отрезков

$$\Delta s' = s' - s'_0 = r_0 \frac{e^2}{1 + e} \frac{1 - \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Полученное выражение с учетом (3) можно представить в виде

$$\Delta s' = e^2 z. \quad (9)$$

Кривую сечения поверхности вращения второго порядка меридиональной плоскостью в прямо-



Определение точки пересечения нормали к поверхности с оптической осью.

угольной системе координат можно определить уравнением

$$y^2 = 2r_0 z - (1 - e^2)z^2. \quad (10)$$

Решив это уравнение относительно переменной  $z$ , получаем

$$z = \frac{r_0}{1 - e^2} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1 - e^2}{r_0^2} y^2} \right).$$

Для рассматриваемого случая справедливо решение

$$z = \frac{r_0}{1 - e^2} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{1 - e^2}{r_0^2} y^2} \right). \quad (11)$$

Заменив функцию, определяемую квадратным корнем, степенным рядом, получаем

$$z = \frac{1}{2r_0} y^2 \left[ 1 + \frac{1}{4} \frac{1 - e^2}{r_0^2} y^2 + \frac{1}{8} \frac{(1 - e^2)^2}{r_0^4} y^4 + \frac{5}{64} \frac{(1 - e^2)^3}{r_0^6} y^6 + \dots \right]. \quad (12)$$

Из выражения (3) находим, что

$$\cos \varphi = \frac{r_0 - (1 + e)z}{r_0 + e(1 + e)z}. \quad (13)$$

Подставив это выражение в (4) и преобразовав его, получаем

$$\sin \varphi = y \frac{1 + e}{r_0 + e(1 + e)z}. \quad (14)$$

Выражения (13) и (14) позволяют преобразовать (7) к виду

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{y}{r_0 - (1 - e^2)z}. \quad (15)$$

Заметим, что при  $e = 1$  (параболоид вращения)

$$\operatorname{tg} \gamma = \operatorname{tg} \gamma_p = \frac{y}{r_0}.$$

При этом выражение (12) можно представить в виде

$$z = \frac{1}{2} r_0 \psi_e \operatorname{tg}^2 \gamma_p, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_e = 1 + \frac{1}{4} (1 - e^2) \operatorname{tg}^2 \gamma_p + \frac{1}{8} (1 - e^2)^2 \operatorname{tg}^4 \gamma_p + \\ + \frac{5}{64} (1 - e^2)^3 \operatorname{tg}^6 \gamma_p + \dots \end{aligned}$$

Подставив (16) в (9), получаем, что разброс точек пересечения нормалей к несферической поверхности вращения второго порядка с оптической осью

$$\Delta s' = \frac{1}{2} e^2 r_0 \psi_e \operatorname{tg}^2 \gamma_p. \quad (17)$$

Отсюда следует, что при  $e = 0$  (сферическая поверхность)  $\Delta s' = 0$ ; при  $0 < e < 1$  (эллипсоид вращения) величина  $\psi_e > 0$ ; при  $e = 1$  (параболоид вращения) величина  $\psi_e = 1$ , а величина  $\Delta s' = 0,5 y^2 / r_0$ ; при  $e > 1$  (гиперболоид вращения)  $\psi_e$  определяется знакпеременным рядом, при этом  $0 < \psi_e < 1$ ; при  $e^2 < 0$  (сжатый или сплюснутый сфероид) величина  $\psi_e > 1$ , а разброс точек пересечения нормалей с оптической осью  $\Delta s' < 0$ .

В соответствии со смыслом решаемой задачи выражение (17) определяет продольную сферическую абберацию  $\Delta s'_k$  в изображении точки, образованном компенсатором. При этом в идеальном случае должно выполняться условие  $\Delta s'_k = -\Delta s'$ . Учитывая это, полученные результаты выполненного анализа позволяют сделать следующие выводы:

1. Получена функциональная зависимость продольной сферической абберации в изображении точки, образованном компенсатором при компенсационном методе контроля формы несферической поверхности второго порядка.

2. Показано, что величина  $e^2$  определяет не только продольную сферическую абберацию, но и характер ее изменения при изменении выходного угла  $\sigma'_k = \gamma_p$ .

3. Из анализа полученной функциональной зависимости продольной сферической абберации от выходного угла следует, что она имеет монотонный характер при контроле формы поверхности эллипсоида и параболоида вращения, а в схеме контроля формы поверхности

гиперболоида вращения определяется знакопеременным рядом.

Таким образом, в схеме контроля формы поверхности эллипсоида или параболоида вращения оптическая система компенсатора принципиально может состоять из одной линзы. При контроле формы поверхности вогнутого гиперболоида оптическая система компенсатора должна быть более сложной.

Погрешность контроля формы несферических поверхностей непосредственно определяется качеством изготовления элементов компенсационной схемы контроля и прежде всего оптической системы компенсатора. Поэтому естественно стремиться к тому, чтобы оптическая система компенсатора содержала как можно меньше оптических элементов (линз). Примером удачного решения задачи построения оптической системы компенсатора можно считать оптическую систему компенсатора Оффнера,

обладающую оригинальными коррекционными возможностями [5, 6].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Пурыев Д.Т.* Методы контроля оптических асферических поверхностей. М.: Машиностроение, 1976. 262 с.
2. *Зверев В.А., Кривоустова Е.В.* Оплотехника несферических поверхностей. Учебное пособие. СПб.: СПбГУ ИТМО, 2006. 203 с.
3. *Шеннон Р.* Проектирование оптических систем. М.: Мир, 1983. С. 67–98.
4. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: ГИТТЛ, 1957. 608 с.
5. *Зверев В.А., Кривоустова Е.В.* Анализ схемы контроля вогнутых поверхностей вращения несферической формы компенсационным методом // Оптический журнал. 2005. Т. 72. № 10. С. 40–46.
6. Оптический производственный контроль / Под ред. Д. Малакары. М.: Машиностроение, 1985. 400 с.