

## РАСЧЕТ МОД ФОТОННО-КРИСТАЛЛИЧЕСКОГО СВЕТОВОДА РАЗНОСТНЫМ МЕТОДОМ

© 2007 г. **В. В. Котляр**, доктор физ.-мат. наук; **Я. О. Шуюпова**

Институт систем обработки изображений РАН, Самарский государственный  
аэрокосмический университет, г. Самара

E-mail: kotlyar@smr.ru; volosiha@bk.ru

Рассматривается быстрый и эффективный метод отыскания мод неоднородного в поперечном сечении световода, в основе которого лежит применение конечно-разностных аппроксимаций к волновым уравнениям отдельно для электрической и магнитной составляющих поля. Полностью приведена матрица разностной задачи на собственные значения для электрической составляющей электромагнитного поля. Обсуждаются особенности реализации метода в среде Matlab. Метод применяется для расчета фундаментальной моды и нескольких мод высшего порядка фотонно-кристаллического световода. Для выбранной модели получен график дисперсионного параметра, который характеризует временное уширение импульса в световоде.

Коды OCIS: 060.0060.

*Поступила в редакцию 12.01.2007.*

### 1. Введение

Все большую популярность в наши дни приобретают, благодаря своим нетривиальным свойствам, микроструктурированные волокна или фотонно-кристаллические световоды. Это относительно новый класс оптических волокон, обладающих свойствами фотонных кристаллов [1]. Фотонно-кристаллические световоды (ФКС) обычно изготавливаются из кварца и имеют в своей структуре многочисленные микровключения, чаще микроотверстия. В настоящий момент ФКС находят применение в сфере коммуникаций, волоконных лазерах, устройствах нелинейной оптики, оптических линиях передачи излучения высокой мощности, высокочувствительных газовых сенсорах. Известны два основных типа ФКС, представляющих практический и теоретический интерес: волокна со сплошным сердечником, окруженным несколькими рядами микроотверстий, обычно располагающихся в форме шестиугольника [2, 3], и волокна с полым сердечником – центральное отверстие, как правило, большего радиуса также окружается “кольцами” микроотверстий. Известны также волокна Брэгга, представляющие собой волокна, сформированные концентрическими кольцами многослойной пленки, распространение света в них подчиняется принципу запрещенных зон фотонного кристалла [4]. Такое волокно в поперечном сечении является двумерным кристаллом с зонной структурой фотонного изолятора. При этом в продольном направлении волокно является идеальным проводником света. Теоретический интерес к ФКС вызван в большей степени наличием в их структуре больших контрастов показателя преломления, чем в обычных слабонаправляющих волно-

водах, и, как следствие, необходимостью создания специальных работоспособных методов их исследования. Стоит отметить, что способность ФКС заключать в себе свет зависит от множества факторов, таких как количество микровключений, их местоположение и форма [5, 6], соотношение диаметра микроотверстий и расстояния между центрами ближайших микроотверстий, что дает широкое поле деятельности для моделирования их свойств [7].

### 2. Конечно-разностный метод решения волновых уравнений

В своих предыдущих работах авторы демонстрировали результаты применения метода согласованных синусоидальных мод [8] к задаче расчета мод ФКС [9, 10]. За основу метода, рассматриваемого в настоящей работе, был взят подход, предложенный в работе [6] и с успехом примененный авторами к круглым волокнам [11], где для расчета мод использовался метод конечно-разностного решения векторных волновых уравнений для монохроматического света. Однако расчет был проведен только для электрической составляющей электромагнитного поля. Соответствующие формулы для расчета магнитной составляющей светового поля можно встретить в работе [12]. Мы приведем расчетные формулы для обеих составляющих электромагнитного поля и сравним результаты решения двух независимых задач для электрической и магнитной составляющих, в частности сравним значения эффективного показателя моды. Особое внимание уделено полному описанию матрицы разностной задачи на собственные числа и вектора напряженности электрической составляющей элек-

ромагнитного поля. Заметим, что в работах [6, 12] вид аналогичных матриц не приведен.

Рассмотрим однородные волновые уравнения для монохроматического излучения в диэлектрической среде без источников [6, 12]

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \nabla(\nabla \ln n^2 \mathbf{E}) + k_0^2 n^2 \mathbf{E} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - (\nabla \times \mathbf{H}) \times \nabla \ln n^2 + n^2 k_0^2 \mathbf{H} = 0, \quad (2)$$

где  $n$  – показатель преломления среды, зависящий от поперечных координат  $x, y$ ;  $k_0 = 2\pi/\lambda$  – волновое число в вакууме,  $\lambda$  – длина волны света.

Далее применим уравнения (1) и (2) для волноводов, однородных вдоль продольной оси  $z$ . При этом электрическую и магнитную составляющие поля можно представить в виде  $\mathbf{E}(x, y, z) = \mathbf{E}(x, y) \exp(-ik_z z)$  и  $\mathbf{H}(x, y, z) = \mathbf{H}(x, y) \exp(-ik_z z)$ , где  $\mathbf{E}(x, y)$  и  $\mathbf{H}(x, y)$  – напряженности электрической и магнитной составляющих электромагнитного поля в поперечной плоскости,  $k_z$  – константа распространения. Далее используются граничные условия Неймана  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  и  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{n}} = 0$ , где  $\mathbf{n}$  – вектор нормали к границам исследуемой области. Принимая во внимание инвариантность волновода вдоль продольной оси  $z$  и равенства  $\frac{\partial \ln n^2}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} = -ik_z \mathbf{E}$  и  $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial z} = -ik_z \mathbf{H}$ , векторные уравнения (1) и (2) можно представить в матричной форме

$$\begin{bmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = k_z^2 \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} = k_z^2 \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где непрерывные дифференциальные операторы  $P_{ij}$  и  $Q_{ij}$  определяются следующим образом:

$$P_{xx} E_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial (E_x \ln n^2)}{\partial x} \right] + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + n^2 k_0^2 E_x, \quad (5)$$

$$P_{yy} E_y = \frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial (E_y \ln n^2)}{\partial y} \right] + n^2 k_0^2 E_y, \quad (6)$$

$$P_{xy} E_y = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial (E_y \ln n^2)}{\partial y} \right] - \frac{\partial^2 E_y}{\partial x \partial y}, \quad (7)$$

$$P_{yx} E_x = \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial (E_x \ln n^2)}{\partial x} \right] - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y \partial x}, \quad (8)$$

$$Q_{xx} H_x = \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + (1 + \ln n^2) \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln n^2 \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) + n^2 k_0^2 H_x, \quad (9)$$

$$Q_{yy} H_y = (1 + \ln n^2) \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln n^2 \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) + n^2 k_0^2 H_y, \quad (10)$$

$$Q_{xy} H_y = \frac{\partial}{\partial y} \left( \ln n^2 \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) - \ln n^2 \frac{\partial^2 H_y}{\partial y \partial x}, \quad (11)$$

$$Q_{yx} H_x = \frac{\partial}{\partial x} \left( \ln n^2 \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \ln n^2 \frac{\partial^2 H_x}{\partial x \partial y}. \quad (12)$$

Заменяя непрерывные дифференциальные операторы конечно-разностными и используя следующие аппроксимации:

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{f(x_{i+1}, y) - f(x_{i-1}, y)}{2h_x}, \quad (13)$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right|_{y_j} = \frac{f(x, y_{j+1}) - f(x, y_{j-1})}{2h_y}, \quad (14)$$

$$\left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} \right|_{x_i} = \frac{f(x_{i-1}, y) - 2f(x_i, y) + f(x_{i+1}, y)}{h_x^2}, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} \right|_{y_j} &= \\ &= \frac{f(x, y_{j-1}) - 2f(x, y_j) + f(x, y_{j+1})}{h_y^2}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} \right|_{x_i y_j} = \frac{[f(x_{i+1}, y_{j+1}) - f(x_{i+1}, y_{j-1})] - [f(x_{i-1}, y_{j+1}) - f(x_{i-1}, y_{j-1})]}{4h_x h_y}, \quad (17)$$

получаем две независимые задачи на собственные значения относительно квадрата константы распространения

$$RE = k_z^2 E, \quad (18)$$

$$SH = k_z^2 H. \quad (19)$$

Размерность каждой из задач (18) и (19)  $2M2M$ , где  $M = n_x n_y$ , а  $n_x, n_y$  – количество узлов сетки по соответствующим осям.

Матрицы задач (18) и (19) имеют сходную структуру, поэтому рассмотрим только матрицу  $R$  задачи (18). Она имеет следующий вид:

$$R = \begin{bmatrix} \tilde{A}_1^1 & B_1^2 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_2^{n_x+1} & B_2^{n_x+2} & 0 & 0 & 0 \\ C_1^1 & A_1^2 & B_1^3 & \vdots & \vdots & C_2^{n_x+1} & A_2^{n_x+2} & B_2^{n_x+3} & \vdots & \vdots \\ 0 & C_1^2 & A_1^3 & 0 & 0 & 0 & C_2^2 & A_2^{n_x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1^3 & \ddots & B_1^{n_x-1} & 0 & 0 & C_2^{n_x+3} & \ddots & B_2^{2n_x-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & A_1^{n_x-1} & B_1^{n_x} & \vdots & \vdots & \vdots & A_2^{2n_x-1} & B_2^{2n_x} \\ 0 & 0 & 0 & C_1^{n_x-1} & \tilde{A}_1^{n_x} & 0 & 0 & 0 & C_2^{2n_x-1} & \tilde{A}_2^{2n_x} \\ \tilde{A}_3^1 & B_3^2 & 0 & 0 & 0 & \tilde{A}_4^{n_x+1} & B_4^{n_x+2} & 0 & 0 & 0 \\ C_3^1 & 0 & B_3^3 & \vdots & \vdots & C_4^{n_x+1} & A_4^{n_x+2} & B_4^{n_x+3} & \vdots & \vdots \\ 0 & C_3^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_4^{n_x+2} & A_4^{n_x+3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_3^3 & \ddots & B_3^{n_x-1} & 0 & 0 & C_4^{n_x+3} & \ddots & B_4^{2n_x-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & B_3^{n_x} & \vdots & \vdots & \vdots & A_4^{2n_x-1} & B_4^{2n_x} \\ 0 & 0 & 0 & C_3^{n_x-1} & \tilde{A}_3^{n_x} & 0 & 0 & 0 & C_4^{2n_x-1} & \tilde{A}_4^{2n_x} \end{bmatrix}, \quad (20)$$

где 0 – нулевая матрица размера  $n_x n_y$ . Точные формулы для расчета ненулевых элементов матрицы (20) приводятся в Приложении.

Векторы-столбцы  $E$  и  $H$  являются собственными векторами в задачах (18) и (19) и содержат отсчеты всех четырех поперечных компонентов моды.

Рассмотрим подробнее структуру вектора

$$E = (E_x E_y)^T, \quad (21)$$

здесь  $T$  – значок транспонирования и

$$\begin{cases} E_x = (E_1 E_2 E_3 \dots E_M), \\ E_y = (E_{M+1} E_{M+2} E_{M+3} \dots E_{2M}). \end{cases} \quad (22)$$

Таким образом, этот вектор содержит все отсчеты обоих результирующих компонентов  $E_x$  и  $E_y$ . Аналогичным образом вектор  $H$  содержит отсчеты компонентов  $H_x$  и  $H_y$ .

### 3. Численные эксперименты

#### 3.1. Особенности практической реализации метода

Задачи (18) и (19) можно решать независимо друг от друга, причем очевидно, что значения константы распространения моды, полученные в результа-

те решения обеих задач, должны совпадать с некоторой точностью. Реализация метода была проведена исключительно с помощью функций, предоставляемых математическим пакетом Matlab. Проблема большой размерности матриц задач (18) и (19) легко решена путем использования данных типа “разреженная матрица” для манипуляций с ними. Получив матрицу задачи (18) или (19), можно, используя стандартные функции пакета Matlab, найти ее собственные значения, каждое из них есть квадрат константы распространения и определяет отдельную моду, соответствующий же собственный вектор хранит в развернутом виде двумерный массив значений двух поперечных электрических или магнитных компонентов.

#### 3.2. Расчет мод

##### микроструктурированного волновода

В качестве объекта исследования был выбран микроструктурированный волновод, сечение которого изображено на рис. 1а. Данный волновод имеет сплошной сердечник с показателем преломления  $n = 1,46$ , светлые области на рисунке – это отверстия заполненные воздухом с  $n = 1$ . Расстояние между центрами отверстий  $\Lambda$  и длина волны  $\lambda$  были выбраны такими, что отношение  $\lambda/\Lambda = 0,6$ . Коэф-

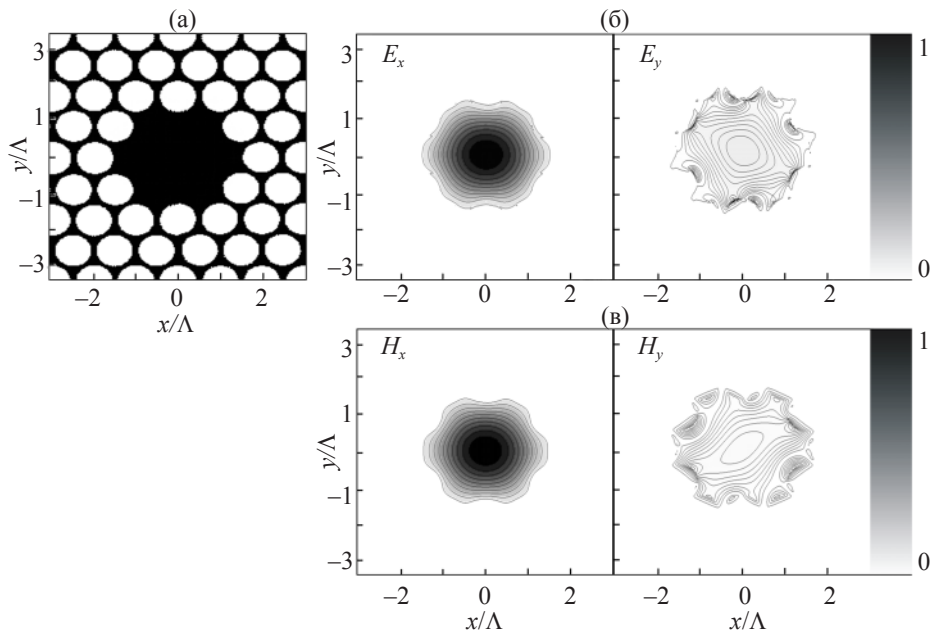


**Рис. 1.** Сечение микроструктурированного волновода (а), распределение абсолютных значений электрических (б) и магнитных (в) составляющих фундаментальной моды.

фициент заполнения, равный отношению диаметра отверстия  $d$  к расстоянию между центрами соседних отверстий  $\Lambda$ , составляет 0,94. Расчет проводился по всей области сечения, где была определена равномерная сетка размером  $204 \times 228$ , что позволило добиться точности определения компонентов электромагнитного поля моды порядка  $0,03\Lambda$ . Электрические и магнитные составляющие фундаментальной моды, полученные в результате решения задач (18) и (19), изображены на рис. 1(б) и 1(в) соответственно. В результате решения обеих задач были получены два значения эффективного индекса моды  $n_{\text{эф}} = k_z/k_0$ . Разность между значениями эффективного индекса фундаментальной моды в этих двух случаях составила 0,008%. Таким образом, можно принять в качестве истинного его значения среднее  $n_{\text{эф}}^{\text{cp}} = (n_{\text{эф}}^{\text{эл}} + n_{\text{эф}}^{\text{маг}})/2 = 1,4508709$ .

Вид моды на рис. 1б качественно совпадает с видом моды, рассчитанной в работе [13] другим методом. В [13] задача решалась с помощью разложения поперечных составляющих напряженности магнитного поля в ряд по ортогональным функциям Эрмита–Гаусса.

График дисперсионного параметра  $D = -(\lambda/c)d^2 n_{\text{эф}}/d\lambda^2$  [6] показан на рис. 2. Этот параметр характеризует дисперсию групповой скорости модового импульса при его распространении в световоде. Из рис. 2 видно, что световод, показанный на рис. 1а, обладает нормальной дисперсией. Экстраполяция графика на рис. 2 в сторону больших длин волн показывает, что вблизи длины волны 0,7 мкм дисперсия будет нулевой.

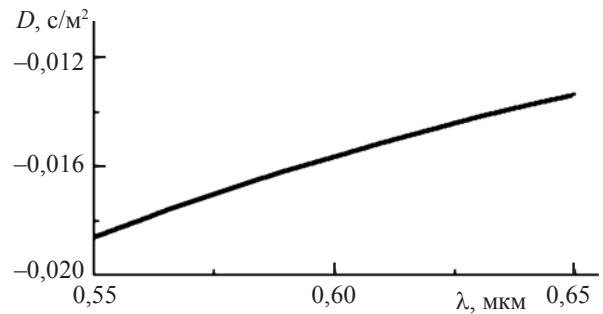


**Рис. 2.** График дисперсионного параметра для модели волновода, рассматриваемой в тексте.

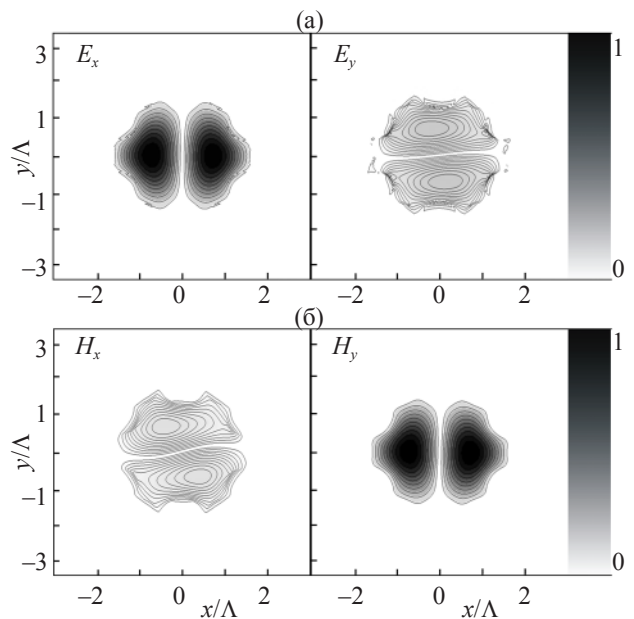


**Рис. 3.** Распределение абсолютных значений электрических (а) и магнитных (б) составляющих высшей моды с эффективным индексом  $n_{\text{эф}}^{\text{cp}} = 1,4385320$ .

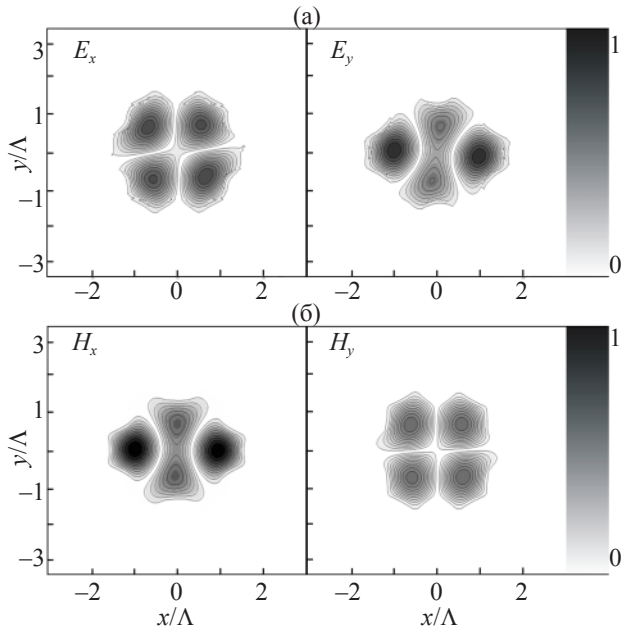


**Рис. 4.** Распределение абсолютных значений электрических (а) и магнитных (б) составляющих высшей моды с эффективным индексом  $n_{\text{эф}}^{\text{ср}} = 1,4205173$ .

Дисперсионная кривая на рис. 2 качественно согласуется с аналогичной кривой, полученной в работе [13], и с кривыми, полученными в работе [14]. В [14] дисперсионные кривые рассчитывались с помощью коммерческой программы MIT Photonic-Bands package.

Для рассматриваемого ФКС также были получены распределения компонентов мод высших порядков (рис. 3 и рис. 4).

## Заключение

В данной работе описан метод расчета нескольких первых мод фотонно-кристаллических световодов вместе с их постоянными распространения, основанный на решении разностной задачи на собственные числа и вектора матриц размерностью  $2M2M$ , где  $M = n_x n_y$  и  $n_x, n_y$  – количество узлов сетки отсчетов поперечных составляющих напряженности электрического или магнитного поля монохроматической электромагнитной волны, наложенной на сечение световода по декартовым осям. Полностью выписана матрица для электрической задачи на собственные числа. Элементы этой матрицы получаются в результате замены однородного векторного волнового дифференциального уравнения типа уравнения Гельмгольца на его конечно-разностную аппроксимацию. Метод имеет средство для самопроверки путем сравнения констант для распространения, полученных независимо в результате решения электрической и магнитной задач на собственные значения. Метод реализован с помощью пакета Matlab. Рассчитанные данным методом несколько первых мод для типичного фотонно-кристаллического световода и дисперсионная кривая качественно согласуются с аналогичными расчетами, полученными в работах других авторов другими методами.

## Приложение

Элементы верхнего левого квадранта матрицы (20), обозначенные цифрой 1 в нижнем индексе, определяются следующим образом:

$$\tilde{A}_1^1 = \begin{bmatrix} T_2^1 + T_y + T_4^1 & T_y & 0 & 0 & 0 \\ T_y & T_2^1 + T_4^1 & T_y & \vdots & \vdots \\ 0 & T_y & T_2^1 + T_4^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_y & \ddots & T_y \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_2^1 + T_4^1 & T_y \\ 0 & 0 & 0 & T_y & T_2^1 + T_4^1 + T_y \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (23)$$

$$A_i^i = \begin{bmatrix} T_y + T_4^i & T_y & 0 & 0 & 0 \\ T_y & T_4^i & T_y & \vdots & \vdots \\ 0 & T_y & T_4^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_y & \ddots & T_y \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_4^i & T_y \\ 0 & 0 & 0 & T_y & T_4^i + T_y \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad \text{где } i = 2, 3, \dots, n_x - 1, \quad (24)$$

$$\tilde{A}_1^{n_x} = \begin{bmatrix} T_y + T_4^{n_x} + T_5^{n_x} & T_y & 0 & 0 & 0 \\ T_y & T_2^{n_x} + T_4^{n_x} + T_5^{n_x} & T_y & \vdots & \vdots \\ 0 & T_y & T_2^{n_x} + T_4^{n_x} + T_5^{n_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_y & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_2^{n_x} + T_4^{n_x} + T_5^{n_x} & T_y \\ 0 & 0 & 0 & T_y & T_4^{n_x} + T_5^{n_x} + T_y \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (25)$$

$$B_1^i = \text{diag} \{ T_5^i \}_{n_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n_x, \quad (26)$$

$$C_1^i = \text{diag} \{ T_2^i \}_{n_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n_x. \quad (27)$$

Пусть  $(l_1, l_2)$  – позиция  $T_j^i$  в матрице  $X_1^i$ , где  $X = A, B, C$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_x$ , и пусть его позиция в результирующей матрице (20)  $(g_1, g_2)$ , тогда связь между ними выражается как

$$\begin{cases} g_1 = (i-1)n_y + l_1, \\ g_2 = (i-1)n_y + l_2. \end{cases} \quad (28)$$

В (23)–(27):

$$T_2^i = -a_x(i_x, i_y) e(i_x - 1, i_y) / 2/h_x + e(i_x - 1, i_y) / e(i_x, i_y) / h_x^2,$$

$$\text{где} \begin{cases} g_1 = (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = (i_x - 2)n_y + i_y. \end{cases} \quad (29)$$

$$T_4^i = e(i_x, i_y) k_0^2 - 2/h_x^2 - 2/h_y^2, \quad (30)$$

$$\text{где} \begin{cases} g_1 = (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = (i_x - 1)n_y + i_y. \end{cases}$$

$$T_5^i = a_x(i_x, i_y) e(i_x + 1, i_y) / 2/h_x + e(i_x + 1, i_y) / e(i_x, i_y) / h_x^2, \quad (31)$$

$$\text{где} \begin{cases} g_1 = (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = i_x n_y + i_y. \end{cases}$$

Элементы правого нижнего квадранта матрицы (20), обозначенные в нижнем индексе цифрой 4, задаются выражениями:

$$\tilde{A}_4^{n_x+1} = \begin{bmatrix} T_x + V_3^{n_x+1} + T_4^{n_x+1} & V_4^{n_x+1} & 0 & 0 & 0 \\ V_3^{n_x+1} & T_x + T_4^{n_x+1} & V_4^{n_x+1} & \vdots & \vdots \\ 0 & V_3^{n_x+1} & T_x + T_4^{n_x+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^{n_x+1} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_x + T_4^{n_x+1} & V_4^{n_x+1} \\ 0 & 0 & 0 & V_3^{n_x+1} & T_x + T_4^{n_x+1} + V_6^{n_x+1} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (32)$$

$$A_4^{n_x+i} = \begin{bmatrix} V_3^{n_x+i} + T_4^{n_x+i} & V_4^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ V_3^{n_x+i} & T_4^{n_x+i} & V_4^{n_x+i} & \vdots & \vdots \\ 0 & V_3^{n_x+i} & T_4^{n_x+i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^{n_x+i} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_4^{n_x+i} & V_4^{n_x+i} \\ 0 & 0 & 0 & V_3^{n_x+i} & T_4^{n_x+i} + V_4^{n_x+i} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad i = 2, 3, \dots, n_x - 1, \quad (33)$$

$$\tilde{A}_4^{2n_x} = \begin{bmatrix} V_3^{2n_x} + T_4^{2n_x} + T_x & V_4^{2n_x} & 0 & 0 & 0 \\ V_3^{2n_x} & T_4^{2n_x} + T_x & V_4^{2n_x} & \vdots & \vdots \\ 0 & V_3^{2n_x} & T_4^{2n_x} + T_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V_3^{2n_x} & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & T_4^{2n_x} + T_x & V_4^{2n_x} \\ 0 & 0 & 0 & V_3^{2n_x} & T_4^{2n_x} + T_x + V_6^{2n_x} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (34)$$

$$B_4^{n_x+i} = \text{diag}\{T_x\}_{n_y}, \quad i=1,2,\dots,n_x, \quad (35)$$

$$C_4^{n_x+i} = \text{diag}\{T_x\}_{n_y}, \quad i=1,2,\dots,n_x. \quad (36)$$

Пусть  $(l_1, l_2)$  – позиция  $Y_j^i$ ,  $Y = T, V$  в матрице  $X_4^{n_x+i}$ , где  $X = A$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_x$ , и пусть его позиция в результирующей матрице (20)  $(g_1, g_2)$ , тогда связь между ними выражается как

$$\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i-1)n_y + l_1, \\ g_2 = n_x n_y + (i-1)n_y + l_2. \end{cases} \quad (37)$$

В (32)–(34):

$$V_3^{n_x+i} = -a_y(i_x, i_y) e(i_x, i_y - 1)/2/h_y + e(i_x, i_y - 1)/e(i_x, i_y)/h_y^2, \quad (38)$$

$$\text{где} \begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y - 1. \end{cases}$$

$$T_4^{n_x+i} = e(i_x, i_y) k_0^2 - 2/h_x^2 - 2/h_y^2, \quad (39)$$

$$\text{где} \begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y. \end{cases}$$

$$V_6^{n_x+i} = a_y(i_x, i_y) e(i_x, i_y + 1)/2/h_y + e(i_x, i_y + 1)/e(i_x, e_y)/h_y^2, \quad (40)$$

$$\text{где} \begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y + 1. \end{cases}$$

Элементы правого верхнего квадранта матрицы (20) обозначенные в нижнем индексе цифрой 2, задаются выражениями:

$$\tilde{A}_2^{n_x+1} = \begin{bmatrix} T_1^{n_x+1} + U_3^{n_x+1} & U_6^{n_x+1} + T_9^{n_x+1} & 0 & 0 & 0 \\ T_1^{n_x+1} + U_3^{n_x+1} & 0 & U_6^{n_x+1} + T_9^{n_x+1} & \vdots & \vdots \\ 0 & T_1^{n_x+1} + U_3^{n_x+1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1^{n_x+1} + U_3^{n_x+1} & \ddots & U_6^{n_x+1} + T_9^{n_x+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & U_6^{n_x+1} + T_9^{n_x+1} \\ 0 & 0 & 0 & T_1^{n_x+1} + U_3^{n_x+1} & U_6^{n_x+1} + T_9^{n_x+1} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (41)$$

$$A_2^{n_x+i} = \begin{bmatrix} U_3^{n_x+i} & U_6^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ U_3^{n_x+i} & 0 & U_6^{n_x+i} & \vdots & \vdots \\ 0 & U_3^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3^{n_x+i} & \ddots & U_6^{n_x+i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & U_6^{n_x+i} \\ 0 & 0 & 0 & U_3^{n_x+i} & U_6^{n_x+i} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad i = 2, 3, \dots, n_x - 1, \quad (42)$$

$$\tilde{A}_2^{2n_x} = \begin{bmatrix} U_3^{2n_x} + T_8^{2n_x} & U_6^{2n_x} + T_7^{2n_x} & 0 & 0 & 0 \\ U_3^{2n_x} + T_8^{2n_x} & 0 & U_6^{2n_x} + T_7^{2n_x} & \vdots & \vdots \\ 0 & U_3^{2n_x} + T_8^{2n_x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_3^{2n_x} + T_8^{2n_x} & \ddots & U_6^{2n_x} + T_7^{2n_x} \\ \vdots & \vdots & 0 & 0 & U_6^{2n_x} + T_7^{2n_x} \\ 0 & 0 & 0 & U_3^{2n_x} + T_8^{2n_x} & U_6^{2n_x} + T_7^{2n_x} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (43)$$

$$B_2^{n_x+i} = \begin{bmatrix} T_8^{n_x+i} & T_7^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ T_8^{n_x+i} & 0 & T_7^{n_x+i} & \vdots & \vdots \\ 0 & T_8^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_8^{n_x+i} & \ddots & T_7^{n_x+i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & T_7^{n_x+i} \\ 0 & 0 & 0 & T_8^{n_x+i} & T_8^{n_x+i} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad i=1,2,\dots,n_x, \quad (44)$$

$$C_2^{n_x+i} = \begin{bmatrix} T_1^{n_x+i} & T_9^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ T_1^{n_x+i} & 0 & T_9^{n_x+i} & \vdots & \vdots \\ 0 & T_1^{n_x+i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1^{n_x+i} & \ddots & T_9^{n_x+i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & 0 & T_9^{n_x+i} \\ 0 & 0 & 0 & T_1^{n_x+i} & T_1^{n_x+i} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad i=1,2,\dots,n_x. \quad (45)$$

Пусть  $(l_1, l_2)$  – позиция  $Y_j^i$ ,  $Y = T, U$  в матрице  $X_4^{n_x+i}$ , где  $X = A, B, C$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_x$ , и пусть его позиция в результирующей матрице  $(g_1, g_2)$ , тогда связь между ними выражается как

$$\begin{cases} g_1 = (i-1)n_y + l_1, \\ g_2 = n_x n_y + (i-1)n_y + l_2. \end{cases} \quad (46)$$

В (31)–(45):

$$T_1^{n_x+i} = \left[ e(i_x-1, i_y-1)/e(i_x, i_y) - 1 \right] / 4/h_x/h_y, \quad (47)$$

$$\text{где } \begin{cases} g_1 = (i_x-1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x-2)n_y + i_y - 1. \end{cases}$$

$$U_3^{n_x+i} = -a_x(i_x, i_y) e(i_x, i_y-1) / 2/h_y, \quad (48)$$

$$\text{где } \begin{cases} g_1 = (i_x-1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x-1)n_y + i_y - 1. \end{cases}$$

$$U_6^{n_x+i} = a_x(i_x, j_y) e(i_x, i_y+1) / 2/h_y, \quad (49)$$

$$\text{где } \begin{cases} g_1 = (i_x-1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x-1)n_y + i_y + 1. \end{cases}$$

$$T_7^{n_x+i} = \left[ e(i_x+1, i_y+1)/e(i_x, i_y) - 1 \right] / 4/h_x/h_y, \quad (50)$$

$$\text{где } \begin{cases} g_1 = (i_x-1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + i_x n_y + i_y + 1. \end{cases}$$

$$T_8^{n_x+i} = \left[ 1 - e(i_x+1, i_y-1)/e(i_x, i_y) \right] / 4/h_x/h_y, \quad (51)$$

$$\text{где } \begin{cases} g_1 = (i_x-1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + i_x n_y + i_y - 1. \end{cases}$$

$$T_9^{n_x+i} = \left[ 1 - e(i_x-1, i_y+1)/e(i_x, i_y) \right] / 4/h_x/h_y, \quad (52)$$

$$\text{где } \begin{cases} g_1 = (i_x-1)n_y + i_y, \\ g_2 = n_x n_y + (i_x-2)n_y + i_y + 1. \end{cases}$$

Элементы левого нижнего квадранта матрицы (20), обозначенные в нижнем индексе цифрой 3, задаются выражениями:

$$\tilde{A}_3^1 = \begin{bmatrix} T_1^1 + U_2^1 & T_9^1 & 0 & 0 & 0 \\ T_1^1 & U_2^1 & T_9^1 & \vdots & \vdots \\ 0 & T_1^1 & U_2^1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1^1 & \ddots & T_9^1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & U_2^1 & T_9^1 \\ 0 & 0 & 0 & T_1^1 & U_2^1 + T_9^1 \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (53)$$

$$\tilde{A}_3^{n_x} = \begin{bmatrix} U_5^{n_x} + T_8^{n_x} & T_7^{n_x} & 0 & 0 & 0 \\ T_8^{n_x} & U_5^{n_x} & T_7^{n_x} & \vdots & \vdots \\ 0 & T_8^{n_x} & U_5^{n_x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_8^{n_x} & \ddots & T_7^{n_x} \\ \vdots & \vdots & \vdots & U_5^{n_x} & T_7^{n_x} \\ 0 & 0 & 0 & T_8^{n_x} & U_5^{n_x} + T_7^{n_x} \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad (54)$$

$$B_3^i = \begin{bmatrix} U_5^i + T_8^i & T_7^i & 0 & 0 & 0 \\ T_8^i & U_5^i & T_7^i & \vdots & \vdots \\ 0 & T_8^i & U_5^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_8^i & \ddots & T_7^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & U_5^i & T_7^i \\ 0 & 0 & 0 & T_8^i & U_5^i + T_7^i \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n_x, \quad (55)$$

$$C_3^i = \begin{bmatrix} T_1^i + U_2^i & T_9^i & 0 & 0 & 0 \\ T_1^i & U_2^i & T_9^i & \vdots & \vdots \\ 0 & T_1^i & U_2^i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1^i & \ddots & T_9^i \\ \vdots & \vdots & \vdots & U_2^i & T_9^i \\ 0 & 0 & 0 & T_1^i & U_2^i + T_9^i \end{bmatrix}_{n_y n_y}, \quad i = 1, 2, \dots, n_x. \quad (56)$$

Пусть  $(l_1, l_2)$  – позиция  $Y_j^i$ ,  $Y = T, U$ , в матрице  $X_3^i$ , где  $X = A, B, C$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_x$ , и пусть его позиция в результирующей матрице  $(g_1, g_2)$ , тогда связь между ними выражается как

$$\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i-1)n_y + l_1, \\ g_2 = (i-1)n_y + l_2. \end{cases} \quad (57)$$

В (53)–(56):

$$T_1^i = [e(i_x - 1, i_y - 1)/e(i_x, i_y) - 1]/4/h_x/h_y, \quad (58)$$

где  $\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = (i_x - 2)n_y + i_y - 1. \end{cases}$

$$U_2^i = -a_y(i_x, i_y)e(i_x - 1, i_y)/2/h_x, \quad (59)$$

где  $\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = (i_x - 2)n_y + i_y. \end{cases}$

$$U_5^i = a_y(i_x, i_y)e(i_x + 1, i_y)/2/h_x, \quad (60)$$

где  $\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = i_x n_y + i_y. \end{cases}$

$$T_7^i = [e(i_x + 1, i_y + 1)/e(i_x, i_y) - 1]/4/h_x/h_y, \quad (61)$$

где  $\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = i_x n_y + i_y + 1. \end{cases}$

$$T_8^i = [1 - e(i_x + 1, i_y - 1)/e(i_x, i_y)]/4/h_x/h_y, \quad (62)$$

где  $\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = i_x n_y + i_y - 1. \end{cases}$

$$T_9^i = [1 - e(i_x - 1, i_y + 1)/e(i_x, i_y)]/4/h_x/h_y, \quad (63)$$

где  $\begin{cases} g_1 = n_x n_y + (i_x - 1)n_y + i_y, \\ g_2 = (i_x - 2)n_y + i_y + 1. \end{cases}$

В приведенных выше формулах  $h_x$  – шаг дискретизации сетки по оси  $x$ , а  $h_y$  – шаг дискретизации сетки по оси  $y$ . Ниже дается определение остальных параметров, использованных при описании матрицы  $R$ .

$$T_x = 1/h_x^2, \quad (64)$$

$$T_y = 1/h_y^2, \quad (65)$$

$$a_x(i_x, i_y) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{n^2(x, y)} \right) \Big|_{x=(i_x-1)h_x, y=(i_y-1)h_y}, \quad (66)$$

$$a_y(i_x, i_y) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{n^2(x, y)} \right) \Big|_{x=(i_x-1)h_x, y=(i_y-1)h_y}, \quad (67)$$

$$e(i_x, i_y) = n^2(x, y) \Big|_{x=(i_x-1)h_x, y=(i_y-1)h_y}. \quad (68)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Knight J.C., Birks T.A., Russell P.St.J., Atkin D.M. All silica single-mode fiber with photonic crystal cladding // Opt. Lett. 1996. № 21. P. 1547–1549.
2. Monro T.M., Richardson D.J., Broderick N.G.R., Bennett P.J. Holey Optical Fibers: An Efficient Modal Model // J. Lightwave Technol. 1999. V. 17. № 6. P. 1093–1102.
3. Monro T.M., Richardson D.J., Broderick N.G.R., Bennett P.J. Modeling Large Air Fraction Holey Optical Fibers // J. Lightwave Technol. 2000. V. 18. № 1. P. 50–56.
4. Cojocaru E. Dispersion analysis of hollow-core modes in ultralarge-bandwidth all-silica Bragg fibers with nanosupports // Appl. Opt. 2006. V. 45. № 9. P. 2039–2045.
5. Steel M.J., Osgood R.M.J. Elliptical hole photonic crystal fibers // Opt. Lett. 2001. V. 26. № 4. P. 229–231.
6. Yang R., Xue W., Huang T., Zhou G. Research on the effect of air hole shape on the properties of microstructured optical fibers // Opt. Eng. 2004. V. 11. № 43. P. 2701–2706.
7. Zhang Ch., Kai G., Wang Zh., Sun T., Wang Ch., Liu Y., Liu J., Zhang W., Yuan Sh., Dong X. Design of tunable band-gap guidance in high-index filled microstructure fibers // JOSA. B. 2006. V. 23. № 4. P. 782–786.
8. Sudbo A.S. Film mode matching: a versatile method for mode film calculations in dielectric waveguides // Pure Appl. Opt. (J. Europ. Opt. Soc. A). 1993. V. 2. P. 211–233.
9. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет пространственных мод оптических волноводов с неоднородным поперечным сечением методом согласованных синусоидальных мод // Компьютерная оптика (ИСОИ РАН, Самара). 2003. № 25. С. 41–48.
10. Kotlyar V.V., Shuyupova Y.O. Calculating the Modes in Microstructured Optical Fibers // Opt. Mem. & Neur. Net. 2004. V. 13. № 1. P. 27–36.
11. Котляр В.В., Шуюпова Я.О. Расчет и сравнение аналитического и полученного конечно-разностным методом решений для круглого волокна // Компьютерная оптика (ИСОИ РАН, Самара). 2005. № 28. С. 41–45.
12. Dangui V., Digonnet M.J.F., Kino G.S. A fast and accurate numerical tool to model the modal properties of photonic-bandgap fibers // Optics Express. 2006. V. 14. № 7. P. 2979–2993.
13. Mogilevtsev D., Birks T.A., Russell P.S.J. Group-velocity dispersion in photonic crystal fiber // Opt. Lett. 1998. V. 23. № 21. P. 1662–1664.
14. Соколов В.О., Плотниченко В.Г., Назарьянц В.О., Дианов Е.М. Численное моделирование фотонно-кристаллических световодов из теллуритно-вольфраматного стекла для применения в параметрических волоконных устройствах // Квантовая электроника. 2006. Т. 36. № 1. С. 67–72.